Aufgabe: Sie wollen mit einem Flugzeug ein Fahrzeug am Boden verfolgen, das sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit u bewegt. Das Fahrzeug soll vom Flugzeug aus stets unter dem gleichen Winkel gesehen werden, d.h. es darf nicht überflogen werden. Bodenunebenheiten sind zu vernachlässigen. Wie sieht die Bahnkurve des Flugzeugs im erdfesten Bezugssystem aus, wie in einem mitbewegten Koordinatensystem? Um welchen Faktor muß die Geschwindigkeit des Flugzeugs variieren können, damit die obengenannten Bedingungen eingehalten werden können? Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn das Fahrzeug zu einem bestimmten Zeitpunkt seine Richtung um 90° nach links ändert?

Lösung: Betrachten wir die Darstellungsgeometrie der Aufgabenstellung gemäß Abbildung 1.

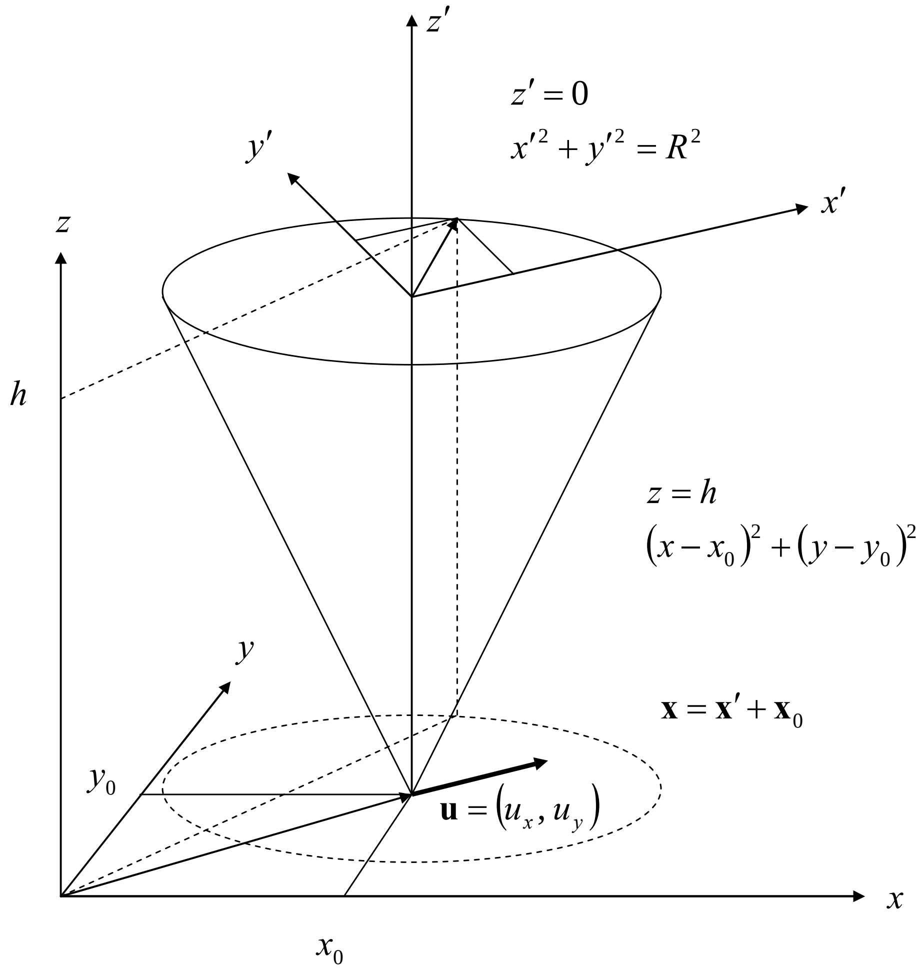

Abbildung 1. Geometrie der Fahrzeugverfolgung

Das gestrichene Koordinatensystem befinde sich mit seiner z-Achse im Abstand h genau über der Fahrzeugposition. Die Flugzeugbahn werde im mitbewegten System als zweidimensionale Kreisbewegung um die Fahrzeugposition (x_0, y_0) beschrieben, d.h.

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

mit $z' = 0.$ Dabei sei R der Radius der Kreisbewegung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Winkel zwischen den Koordinatenachsen zueinander parallel. Im erdfesten Bezugssystem erhalten wir die Kreisgleichung

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

wobei der Ortsvektor des Fahrzeugs eine Funktion der Zeit ist, i.e.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x t \\ u_y t \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in obige Gleichung ergibt sich die Bahnkurve des Flugzeugs in der Form

$$\begin{aligned} &(x - a - u_x t)^2 + (y - b - u_y t)^2 = R^2 \\ &z = h \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - u_x t \\ \tilde{y} &= y - u_y t \end{aligned}$$

führen wir die Gleichung über in

$$(\tilde{x} - a)^2 + (\tilde{y} - b)^2 = R^2,$$

deren Lösungen in Koordinatenschreibweise die Form

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= a + R\cos\varphi \\ \tilde{y} &= b + R\sin\varphi \end{aligned}$$

besitzen, wobei $\varphi = \omega t$ der Winkel der Kreisbewegung und ω die Winkelgeschwindigkeit im mitbewegten System ist. Der Vektor (a, b) sei der Startvektor zur Zeit $t = 0.$ In Komponentendarstellung können wir die Bahngleichungen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} x &= a + u_x t + R\cos\omega t \\ y &= b + u_y t + R\sin\omega t \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir, da es uns auf Zahlenwerte nicht ankommt, folgende Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} &a = b = 0 \\ &u_x = u_y = 1 \\ &R = 1 \\ &\omega = 1 \end{aligned}$$

Mit den gewählten Parametern hat die Bahnkurve die Form wie in Abbildung 2. Dabei hat man sich die Fahrzeugbewegung diagonal durch das Bild verlaufend vorzustellen. Die Bahnkrümmung wechselt also während eines Vollkreises dreimal das Vorzeichen.

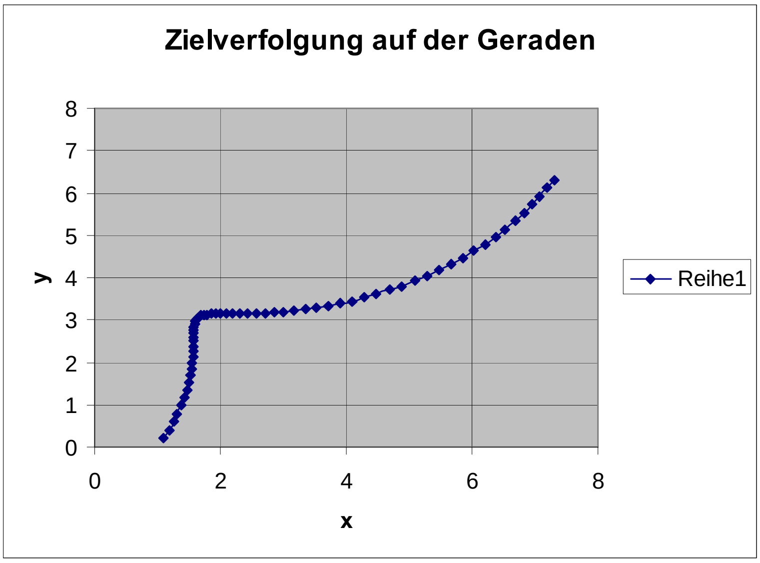

Abbildung 2. Bahnkurve der Fahrzeugverfolgung bei Bewegung in Richtung der Diagonalen

Im mitbewegten System erhalten wir klarerweise eine Kreisbewegung (siehe Abbildung 3).

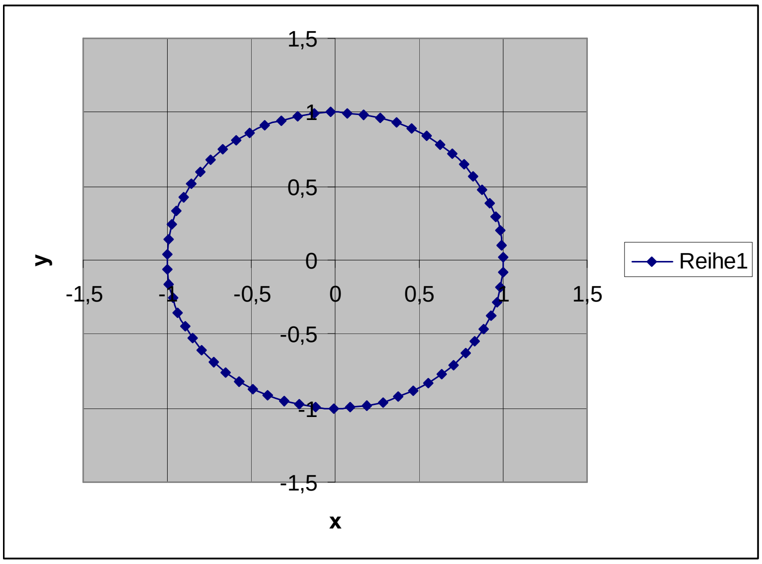

Abbildung 3. Flugbahn im mitbewegten System

Die Geschwindigkeitskomponenten lauten entsprechend

$$\dot{x} = u_x - \omega R \sin \omega t$$
$$\dot{y} = u_y + \omega R \cos \omega t$$

woraus wir nach dem Satz des Pythagoras für die Bahngeschwindigkeit v die Beziehung

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(u_x - \omega R \sin \omega t)^2 + (u_y + \omega R \cos \omega t)^2}.$$

erhalten. Die Bewegung ist klarerweise eine Zentralbewegung mit den Beschleunigungskomponenten

$$\ddot{x} = -\omega^2 R \cos \omega t$$
$$\ddot{y} = -\omega^2 R \sin \omega t$$

und der Zentripetalbeschleunigung

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 R.$$

Den Bereich, innerhalb dessen man die Bahngeschwindigkeit variieren können muß, schätzen wir durch Differentiation des Weg-Zeit-Gesetzes zwischen je zwei diskreten Zeitintervallen ab. Das Ergebnis ist in Abbildung 4 dargestellt. Bildet man das Verhältnis zwischen größter und kleinster Geschwindigkeit 0,25/0,05, so erhält man ungefähr einen Faktor 5, mit dem man mit der Geschwindigkeit deutlich über der Abreißgeschwindigkeit liegen muß, damit man die berechnete Bahn fliegen kann. Das dürfte in der Praxis nicht ganz einfach sein.

Betrachten wir nun einen etwas komplizierteren Fall mit Richtungswechsel, d.h. lassen wir das Flugzeug für die Dauer einer halben Kreisbewegung zunächst längs der x-Achse fliegen und sodann in y-Richtung.

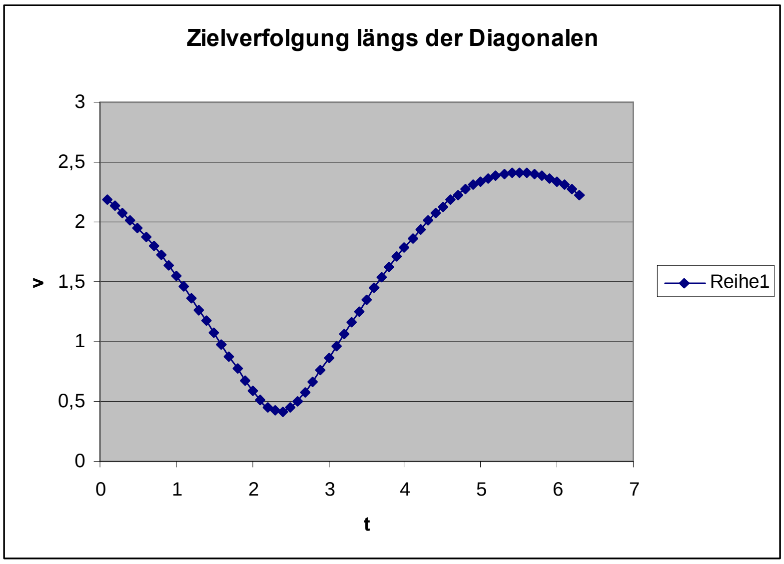

Abbildung 4. Bahngeschwindigkeit im mitbewegten System

Mithin gelten folgende abschnittsweise definierten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{array}{lll} x = a + u_x t + R \cos \omega t & \dot{x} = u_x - \omega R \sin \omega t & t \in [0,\ T/2] \\ y = b + R \sin \omega t & \dot{y} = \omega R \cos \omega t & t \in [0, T/2] \\ x = c + R \cos \omega t & \dot{x} = -\omega R \sin \omega t & t \in [T/2, T] \\ y = d + u_y t + R \sin \omega t & \dot{y} = u_y + \omega R \cos \omega t & t \in [T/2, T] \end{array}$$

Dabei ist T die Periodendauer der Kreisbewegung. Im Punkt der Richtungsänderung gilt:

$$x(T/2) = a + u_x T/2 - R$$
$$y(T/2) = b$$

sowie

$$x(T/2) = c - R$$
$$y(T/2) = d + u_y T/2$$

wobei wir eine stückweise stetige, aber keine differenzierbare Funktion vorliegen haben. Durch Gleichsetzung erhalten wir die Anfangswerte der neuen Mittelpunktskoordinaten:

$$c = u_x T/2$$
$$d = -u_y T/2$$

Als Anfangsbedingungen und aus Normierungsgründen wählen wir in diesem Fall:

$$a = b = 0$$
$$u_x = 1/\sqrt{2} \qquad u_y = 0$$
$$R = 1$$
$$\omega = 1$$

Das Ergebnis der Simulation mit Richtungswechsel ist in Abbildung 5 dargestellt.

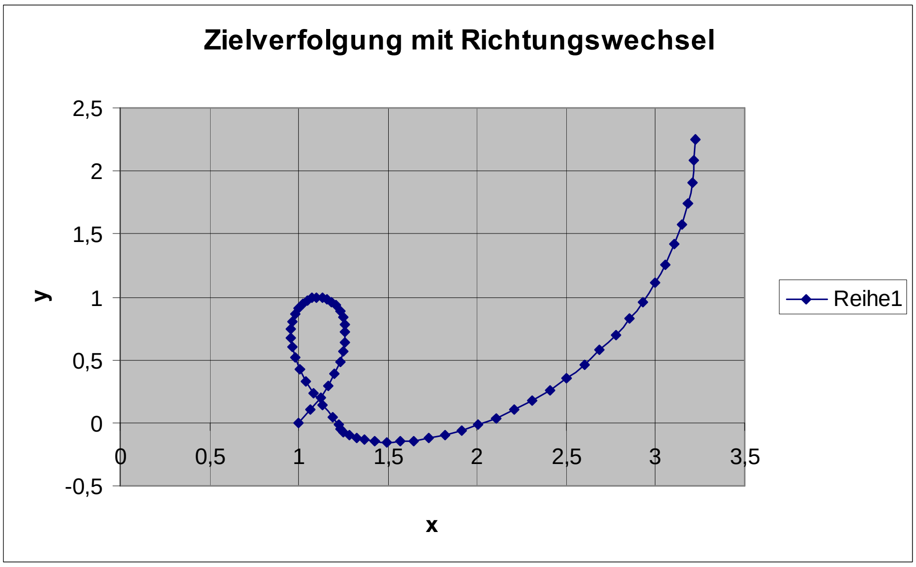

Abbildung 5. Zielverfolgung eines Fahrzeugs, welches sich bis zum Ort $\pi/\sqrt{2}-1$ längs der x-Achse bewegt und sodann um 90° gedreht längs der y-Achse fährt

Auch die entsprechenden Bahngeschwindigkeiten berechnen sich abschnittsweise unterschiedlich:

$$v = \sqrt{(u_x - \omega R \sin \omega t)^2 + \omega^2 R^2 \cos^2 \omega t} \qquad t \in [0,\ T/2]$$
$$v = \sqrt{\omega^2 R^2 \sin^2 \omega t + (u_y + \omega R \cos \omega t)^2} \qquad t \in [T/2, T]$$

Der linksseitige Grenzwert an der Stelle $t = T/2$ unterscheidet sich demnach vom rechtsseitigen, was zu einem Sprung in der Bahngeschwindigkeit führt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v(T/2 - \varepsilon) = \sqrt{u_x^2 + \omega^2 R^2}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} v(T/2 + \varepsilon) = \sqrt{(u_y - \omega R)^2}$$

Im Zahlenbeispiel von oben beträgt der Unterschied einen Faktor $\sqrt{3}/(\sqrt{2} - 1)$.

Theoretisch läßt sich dieses Verfahren auf beliebig viele Kursänderungen anwenden, ja sogar im Falle, daß das Fahrzeug beschleunigt. Schwierigkeiten können aber auftreten, wenn das Fahrzeug vorübergehend verlorengeht. Dann muß die Bahnverfolgung mit Prädiktion erfolgen, was stets gewisse Ungenauigkeiten birgt. Zum zweiten muß die Geschwindigkeit im Knickpunkt in der Praxis ausgeregelt werden, weil sich die Richtung der Zentralkraft sprunghaft ändert. Eine solche Änderung erfolgt natürlich in der Praxis stetig, und nicht als Sprungfunktion. Dennoch können die Änderungen ziemlich abrupt verlaufen (siehe Abbildung 6).

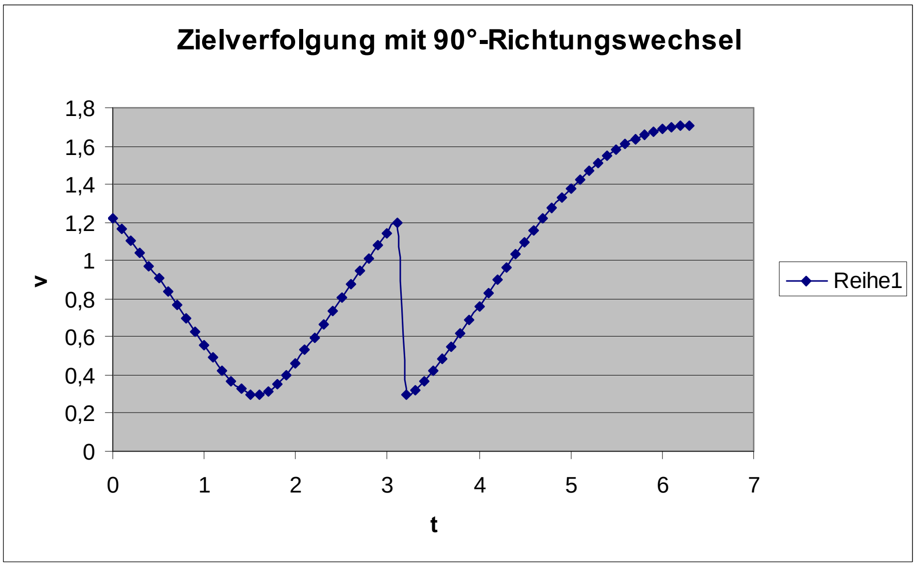

Abbildung 6. Bei Richtungswechsel erfährt die Bahngeschwindigkeit einen Sprung