Aufgabe: Beweisen Sie am Beispiel eines kannibalistischen Räuber-Beute-Systems, daß jede periodische Bewegung in zwei Dimensionen ein Räuber-Beute-System darstellt.

Beweis: Wir lösen die Lotka-Volterra-Gleichungen für ein Räuber-Beute-System, in dem Räuber und Beutetiere derselben Spezies angehören[1] und die Zahl der Räuber zu jener der Beutetiere um 90 Grad phasenverschoben ist. Die Aufgabenstellung impliziert, daß irgendwann kein ausreichendes Nahrungsangebot mehr für alle vorhanden ist und als Räuber diejenigen anzusehen sind, die als die Stärkeren den anderen die Nahrungsgrundlage entziehen, dadurch daß sie sie übervorteilen und verdrängen. Man kann jene Räuber auch Ausbeuter oder Sklavenhalter nennen und die Beutetiere mit abhängig Beschäftigten vergleichen. Arbeitgeber und Arbeitnehmer benötigen sich gegenseitig, um zu überleben. Aufgrund der Ausbeutung und der Notlage der anderen können sich die Räuber besser als die Beutewesen vermehren, denen durch Unterdrückung die Lebensgrundlagen entzogen werden. Auch die Ehe ist ein solches Räuber-Beute-System in Gesellschaften, wo die Frauen arbeiten müssen und die Männer den Pascha spielen. Sei $N_1(t)$ die Anzahl der Beutelebewesen und $N_2(t)$ die Anzahl der Räuber.

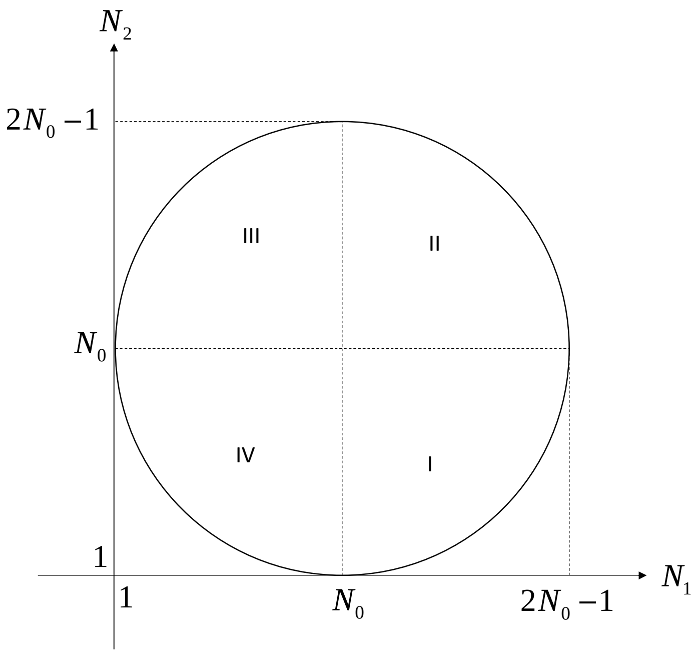

Abbildung 1. Kreisförmiges symmetrisches Räuber-Beute-System mit maximal möglichem Radius

Würde die Veränderlichkeit der Populationen einer Kreisbahn folgen (siehe Abb. 1), kann die Kreisgleichung nur bis zu folgendem maximalem Radius $N_0 - 1 < N_0$ gelten, weil nur dann sichergestellt ist, daß keine der beiden Populationen ausstirbt:

$$\left(N_1 - N_0\right)^2 + \left(N_2 - N_0\right)^2 = \left(N_0 - 1\right)^2 .$$

[1] Beim Menschen würde man sagen: „Homo homini lupus est“, „Der Mensch ist dem Menschen ein Wolf“, aus dem 1642 verfaßten Buch *De Cive* (*Vom Bürger*) von Thomas Hobbes.

Da der Radius konstant bleiben soll, muß auch die Kreisfrequenz ε konstant sein, womit diese Gleichung gelöst wird durch eine Kreisbewegung um den Gleichgewichtspunkt $\left(N_0, N_0\right)$:

$$N_1\left(t\right) = N_0 + \left(N_0 - 1\right)\cos\varepsilon t, \quad N_2\left(t\right) = N_0 + \left(N_0 - 1\right)\sin\varepsilon t.$$

Dabei sind die Ableitungen gegeben durch

$$\frac{dN_1}{dt} = -\varepsilon\left(N_0 - 1\right)\sin\varepsilon t = -\varepsilon\left(N_2 - N_0\right), \quad \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon\left(N_0 - 1\right)\cos\varepsilon t = \varepsilon\left(N_1 - N_0\right).$$

Das können wir wegen der Konstanz der Kreisfrequenz mittels

$$\gamma_1\left(t\right) = \frac{\varepsilon}{N_1\left(t\right)}, \quad \gamma_2\left(t\right) = \frac{\varepsilon}{N_2\left(t\right)}$$

entsprechend umformen:

$$\begin{aligned} dN_1 &= -\frac{\varepsilon}{N_1} N_1\left(N_2 - N_0\right)dt = -\gamma_1 N_1\left(N_2 - N_0\right)dt, \\ dN_2 &= \frac{\varepsilon}{N_2} N_2\left(N_1 - N_0\right)dt = \gamma_2 N_2\left(N_1 - N_0\right)dt, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_1\left(N_2 - N_0\right)$ die Sterberate der Beute ist und $\gamma_2\left(N_1 - N_0\right)$ die Reproduktionsrate der Räuber. Damit entspricht γ_1 der Sterberate der Beute pro Räuber und γ_2 der Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen. Nehmen wir nun noch folgende Substitutionen vor,

$$\varepsilon_1 = \gamma_1 N_0, \quad \varepsilon_2 = \gamma_2 N_0,$$

dann folgen daraus die gekoppelten Lotka-Volterra-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= -N_1\left(\gamma_1 N_2 - \varepsilon_1\right) = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2\left(\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2\right) = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2 \end{aligned}$$

in denen alle vier Raten zeitabhängig sind.[2] Die Beute wächst demnach unabhängig davon, wieviel erbeutet wird, mit der natürlichen Geburtenrate ε_1 und nimmt ab mit der Zahl $\gamma_1 N_2$ derer, die im Kampf um Nahrung getötet wurden oder zu kurz gekommen sind. Das bedeutet, daß für die Beute an sich ein ausreichendes Nahrungsangebot vorhanden wäre, wenn sie sich nicht als Folge eines üppigen Nahrungsüberangebots zu stark vermehren würde, was der Grund dafür ist, daß irgendwann Knappheit eintritt. Somit entspricht $\gamma_1 N_2$ der Sterberate der Beute pro Räuber mal der Zahl der Räuber. Die tatsächliche Sterberate ist also um so größer, je mehr

[2] In den von Lotka und Volterra abgeleiteten Gleichungen sind alle Koeffizienten konstant.

Räuber es gibt. Überwiegt die Sterberate die Geburtenrate, so drohen die Beutewesen auszusterben. Bei ihnen geht man davon aus, daß kein einziges eines natürlichen Todes stirbt, sondern alle entweder im Kampf um Nahrung getötet werden oder aus Nahrungsknappheit verhungern.

Die Änderung der Räuberpopulation ist die Differenz aus deren Geburten- und natürlicher Sterberate ε_2. Im Gegensatz zu den Beutewesen können die Räuber auch eines natürlichen Todes sterben. Je mehr Beutewesen es gibt, desto besser können die Räuber mit der Rate $\gamma_2 N_1$ überleben. Geht die Zahl der Beutewesen, die z.B. als Arbeitssklaven eingesetzt werden, zurück, schwindet auch der Reichtum der Räuber und ihre natürliche Sterberate überwiegt. Dabei geht man davon aus, daß die Räuber nichts selbst machen können und voll auf ihre Beutewesen angewiesen sind. Die Differenzen $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ und $\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2$ können also sowohl positiv als auch negativ sein, je nachdem, ob die Zahl der Räuber oder der Beutetiere überwiegt.

Durch die obigen Substitutionen können wir zwei dieser Raten eliminieren, indem wir setzen:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\gamma_1(t) N_1 (N_2 - N_0), \quad \frac{dN_2}{dt} = \gamma_2(t) N_2 (N_1 - N_0).$$

Der Vorzeichenwechsel findet statt, wenn entweder die Räuber- oder die Beutepopulation den Gleichgewichtswert überschreitet. Im Falle $N_1(t) = N_0$ ist $\dot{N}_2(t) = 0,$ daher befindet sich dort eine horizontale Tangente, und im Falle $N_2(t) = N_0$ ist $\dot{N}_1(t) = 0,$ folglich ist die Tangente dort vertikal. Es handelt sich jeweils um die Extremwerte der periodischen Bewegung in beiden Raumrichtungen.

Wir formen nun entsprechend um und eliminieren γ_1 und γ_2 durch die Kreisfrequenz ε:

$$\frac{1}{N_2 - N_0} \frac{dN_1}{N_1} = -\gamma_1(t)\, dt = -\frac{\varepsilon}{N_1(t)} dt, \quad \frac{1}{N_1 - N_0} \frac{dN_2}{N_2} = \gamma_2(t)\, dt = \frac{\varepsilon}{N_2(t)} dt.$$

Weil die Größen im Nenner durch Ziehen der Quadratwurzeln aus der Kreisbewegung nur von der jeweils anderen Population abhängen,

$$\begin{aligned} N_1 - N_0 &= \pm\sqrt{(N_0 - 1)^2 - (N_2 - N_0)^2} = \pm\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_2 - N_2^2}, \\ N_2 - N_0 &= \pm\sqrt{(N_0 - 1)^2 - (N_1 - N_0)^2} = \pm\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_1 - N_1^2}, \end{aligned}$$

führt die Trennung der Variablen zu folgenden Differentialgleichungen

$$\frac{dN_1}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_1 - N_1^2}} = \mp \varepsilon\, dt, \quad \frac{dN_2}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_2 - N_2^2}} = \pm \varepsilon\, dt.$$

Die entsprechenden Integrale sind elementar lösbar:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}},$$

wobei

$$a = -1, \quad b = 2N_0, \quad c = 1 - 2N_0 < 0$$

und

$$\Delta = 4ac - b^2 = -4\left(1 - 2N_0 + N_0^2\right) = -4\left(1 - N_0\right)^2 < 0.$$

Da die Phase bei unbestimmten Integralen keine Rolle spielt, wählen wir

$$\int \frac{dN_1}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_1 - N_1^2}} = -\arccos\frac{N_1 - N_0}{N_0 - 1}$$

und

$$\int \frac{dN_2}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_2 - N_2^2}} = \arcsin\frac{N_2 - N_0}{N_0 - 1}.$$

Setzen wir diese Stammfunktionen in die Integrale

$$\int \frac{dN_1}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_1 - N_1^2}} = \mp\varepsilon\int dt, \quad \int \frac{dN_2}{\sqrt{1 - 2N_0 + 2N_0 N_2 - N_2^2}} = \pm\varepsilon\int dt$$

ein, folgen für das obere Vorzeichen die Ausdrücke

$$\arccos\frac{N_1 - N_0}{N_0 - 1} = \varepsilon t + \varphi, \quad \arcsin\frac{N_2 - N_0}{N_0 - 1} = \varepsilon t + \varphi,$$

wobei φ eine Integrationskonstante ist. Nach Auflösung der Variablen ergibt sich für das Räuber-Beute-System die um die Phase erweiterte Kreisbewegung:

$$N_1(t) = N_0 + (N_0 - 1)\cos(\varepsilon t + \varphi), \quad N_2(t) = N_0 + (N_0 - 1)\sin(\varepsilon t + \varphi).$$

Zweckmäßigerweise lassen wir unser Räuber-Beute-System mit $\varphi = -\pi/2$ beginnen. Dann gilt

$$N_1(t) = N_0 + (N_0 - 1)\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right), \quad N_2(t) = N_0 + (N_0 - 1)\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

und es ist $N_1(0) = N_0$ und $N_2(0) = 1$, d.h. die Beute ist im Gleichgewicht und es gibt genau einen Räuber, den die Evolution hervorgebracht hat, damit die Beute nicht überhandnimmt. Wenn die Pflanzenfresser nämlich sämtliches Grün aufzehren, sterben sie am Ende selbst aus. So ist der Weltweisheit letzter Schluß.

Das Auftreten eines Räubers ist die Geburtsstunde des Räuber-Beute-Systems, welches mit Phase I in Abb. 1 beginnt. Nach einer Viertelperiode $T/4$ hat die Beutepopulation ihr Maximum erreicht, es ist $N_1(T/4) = 2N_0 - 1$ und $N_2(T/4) = N_0$, d.h. die Räuber befinden sich im biologischen Gleichgewicht. Hier setzt die Phase II des Räuber-Beute-Systems ein.

Während Phase I noch von beiderseitigem Wachstum gesegnet war, beginnt die Beutepopulation von nun an abzunehmen, während die der Räuber stark ansteigt. Am Ende hat die Beute wieder ihren Gleichgewichtswert erreicht, wie es in der Natur eigentlich sein sollte, damit langfristig keine Art überhandnimmt, und es ist $N_1(T/2) = N_0$, während sich die Räuberpopulation[3] im Maximum befindet, weil gilt: $N_2(T/2) = 2N_0 - 1$.

Die folgende Phase III ist gekennzeichnet durch beiderseitigen Rückgang der Populationsstärken, die Beute droht auszusterben, während die Räuber nun ihrem Gleichgewichtswert entgegenstreben, d.h. $N_1(3T/4) = 1$ und $N_2(3T/4) = N_0$.

In Phase IV droht die Räuberpopulation ebenfalls auszusterben, während sich die Beutepopulation langsam wieder erholt und sie es nun ist, die ihrem Gleichgewichtswert entgegenstrebt, den sie bereits zu Beginn des Zyklus einnahm. Natürlich müssen am Ende mindestens zwei Individuen überleben, damit sie sich fortpflanzen können. Er reicht aber auch ein trächtiges Muttertier.

Räuber-Beute-Systeme sind gegen ein Aussterben äußerst resistent, weil in der Natur eher selten der Fall ist, daß nur ein Exemplar einer Art überlebt. Meist findet die Evolution Lösungen, da die Entropie eines Räuber-Beute-Systems nur im mathematischen Idealfall wieder auf Null zurückgeht, während sie in Wirklichkeit ansteigt. Das Überleben der am besten Angepaßten wird meist durch günstigere Mutationen sichergestellt. Keine Art hört jemals auf zu mutieren, da sie von ihrem Räuber faktisch dazu gezwungen wird. Somit scheint das Räuber-Beute-Prinzip auf alles anwendbar zu sein, was noch erhärtet wird dadurch, daß es in der Natur keine magnetischen Monopole gibt. Die interessanteste Frage stellt sich jedoch, wenn man sich auf die Suche nach dem Gegenpol des Universums macht. Welche periodische Bewegung spannt das Weltall auf? Ist es der Austausch von Materie mit Antimaterie oder die Dualität von Energie und dunkler Energie, die zwangsläufig zu der Vorstellung führt, daß auch das All ein geschlossener Zyklus ist? Sind Raum und Zeit im Grunde Kreise, die aus sich selbst wieder hervorgehen. Gibt es den Urknall eigentlich gar nicht oder wiederholt er sich lediglich, womit die Welt immer wieder von vorne anfängt? Der „Great Reset“[4] erscheint am Beispiel des sogenannten kannibalistischen Räuber-Beute-Systems am plausibelsten. Die Welt frißt sich selbst auf,[5] aber sie überlebt dennoch in alle Ewigkeit und ohne jemals begonnen zu haben

qed

[3] Im landläufigen Sinn werden die Räuber als die Bösen bezeichnet, nur weil sie in der Natur ihren Zweck erfüllen.
[4] Die neue Weltordnung, bei der die Entropie auf Null zurückgesetzt wird, wird die alte sein.
[5] Wobei wir die Phasenverschiebung nicht sehen können

