Aufgabe: Berechnen Sie Oberfläche und Trägheitstensor einer Rotationsellipsoidsphäre homogener Massebelegung.

Lösung: Die Gleichung eines Rotationsellipsoids um die *z*-Achse lautet

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Die Fläche des Ellipsoids berechnen wir anhand des Linienelements durch Rotation der Funktion

$$r(z)\equiv\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$$

um die *z*-Achse:

$$S=2\pi\int_{-c}^{c}r(z)\sqrt{1+\left[r'(z)\right]^2}\,dz.$$

Die Ableitung der Funktion $r(z)$ ist gegeben durch

$$r'(z)=-\frac{a}{c}\frac{z}{\sqrt{c^2-z^2}}.$$

Damit ergibt sich folgendes Linienintegral,

$$\begin{aligned}S&=2\pi\frac{a}{c}\int_{-c}^{c}\sqrt{c^2-z^2}\sqrt{1+\frac{a^2}{c^2}\frac{z^2}{c^2-z^2}}\,dz=2\pi\frac{a}{c^2}\int_{-c}^{c}\sqrt{c^4+\left(a^2-c^2\right)z^2}\,dz\\&=2\pi\frac{a}{c^2}\sqrt{a^2-c^2}\int_{-c}^{c}\sqrt{\frac{c^4}{a^2-c^2}+z^2}\,dz,\end{aligned}$$

das wir mit Hilfe einer Formelsammlung auswerten können:

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c}\sqrt{\frac{c^4}{a^2-c^2}+z^2}\,dz&=\frac{1}{2}\left[z\sqrt{\frac{c^4}{a^2-c^2}+z^2}+\frac{c^4}{a^2-c^2}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}\,z}{c^2}\right]_{-c}^{c}\\&=\frac{ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}+\frac{c^4}{a^2-c^2}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Fläche zu

$$S = 2\pi \frac{a}{c^2} \sqrt{a^2 - c^2} \left(\frac{ac^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \frac{c^4}{a^2 - c^2} \operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right)$$
$$= 2\pi a \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right).$$

Das gleiche Verfahren können wir zur Bestimmung des Trägheitsmoments um die z-Achse anwenden:

$$J_{zz} = 2\pi\sigma \int_{-c}^{c} r^3(z) \sqrt{1 + \left[r'(z) \right]^2} dz = 2\pi\sigma \frac{a^3}{c^3} \int_{-c}^{c} \sqrt{c^2 - z^2}^3 \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2} \frac{z^2}{c^2 - z^2}} dz$$
$$= 2\pi\sigma \frac{a^3}{c^4} \int_{-c}^{c} \left(c^2 - z^2 \right) \sqrt{c^4 + \left(a^2 - c^2 \right) z^2} dz$$

Nach der Auftrennung in zwei Integrale

$$J_{zz} = 2\pi\sigma \frac{a^3}{c^4} \sqrt{a^2 - c^2} \int_{-c}^{c} \left(c^2 - z^2 \right) \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2} dz$$
$$= 2\pi\sigma \frac{a^3}{c^2} \sqrt{a^2 - c^2} \left(\int_{-c}^{c} \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2} dz - \frac{1}{c^2} \int_{-c}^{c} z^2 \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2} dz \right)$$

benötigen wir ein weiteres Linienintegral, das ebenfalls elementar ausgewertet werden kann:

$$\int_{-c}^{c} z^2 \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2} dz = \frac{1}{4} \left[z \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2}^3 \right]_{-c}^{c}$$
$$- \frac{1}{8} \frac{c^4}{a^2 - c^2} \left[z \sqrt{\frac{c^4}{a^2 - c^2} + z^2} + \frac{c^4}{a^2 - c^2} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}\, z}{c^2} \right]_{-c}^{c}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{c^4 a^3}{\sqrt{a^2 - c^2}^3} - \frac{1}{4} \frac{c^6}{\sqrt{a^2 - c^2}^3} \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right).$$

Insgesamt folgt

$$J_{zz} = 2\pi\sigma a^3 \left(\left(1 + \frac{1}{4} \frac{c^2}{a^2 - c^2} \right) \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arcsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right) - \frac{1}{2} \frac{a^3}{a^2 - c^2} \right).$$

Setzen wir die Oberfläche ein, können wir das Trägheitsmoment in Abhängigkeit von der Masse ausdrücken:

$$J_{zz}=2\pi a\sigma a^2\left(\left(1+\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\right)\frac{S}{2\pi a}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{a^2-c^2}\right)=ma^2\left(1+\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{a^2-c^2}\frac{2\pi a}{S}\right)$$
$$=ma^2\left(1-\frac{1}{4}\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{4\pi a^2}{S}+\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\right)=ma^2\left(1-\frac{1}{4}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{4\pi a^2}{S}-\frac{c^2}{a^2}\right)\right).$$

Im Grenzwert $c\to a$ geht dieses Trägheitsmoment in das der Kugelsphäre über. Um dies zu zeigen, formen wir zunächst wie folgt um:

$$\frac{4\pi a^2}{S}=\frac{2a}{a+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}}\approx\frac{2a}{a+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}-\dfrac{1}{6}\dfrac{\sqrt{a^2-c^2}^{\,3}}{c^3}\right)}$$
$$=\frac{2a}{a+c-\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2-c^2}{c}}\approx\frac{2a}{a+c}\frac{1}{1-\dfrac{1}{6}\dfrac{a-c}{c}}\approx\frac{2a}{a+c}\left(1+\frac{1}{6}\frac{a-c}{c}\right)$$
$$=\frac{2a}{a+c}\left(1+\frac{1}{6}\frac{a^2-c^2}{c(a+c)}\right).$$

Man kann zeigen, daß

$$\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{2a}{a+c}\left(1+\frac{1}{6}\frac{a^2-c^2}{c(a+c)}\right)-\frac{c^2}{a^2-c^2}=\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{a+c+a-c}{a+c}-\frac{c^2}{a^2-c^2}+\frac{1}{3}\frac{a^3}{c(a+c)^2}$$
$$=\frac{a^2}{a^2-c^2}-\frac{c^2}{a^2-c^2}+\left(1+\frac{1}{3}\frac{a}{c}\right)\frac{a^2}{(a+c)^2}=1+\left(1+\frac{1}{3}\frac{a}{c}\right)\frac{a^2}{(a+c)^2}.$$

Damit geht der Grenzwert des Trägheitsmoments über in

$$\lim_{c\to a}J_{zz}=ma^2\left\{1-\frac{1}{4}\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{4\pi a^2}{S}+\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\right\}$$
$$=ma^2\left\{1-\frac{1}{4}\lim_{c\to a}\left[1+\left(1+\frac{1}{3}\frac{a}{c}\right)\frac{a^2}{(a+c)^2}\right]\right\}=\frac{2}{3}ma^2,$$

was genau dem Trägheitsmoment einer Kugelsphäre entspricht. Alternativ können wir die Oberfläche auch aus dem Flächenintegral berechnen. Die Gleichung eines Rotationsellipsoids um die *z*-Achse besitzt die Parameterdarstellung

$$x=\phi(\varphi,\theta)=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=\psi(\varphi,\theta)=a\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\chi(\varphi,\theta)=c\cos\theta$$

und die partiellen Ableitungen

$$\phi_\varphi=-a\sin\theta\sin\varphi,\quad \psi_\varphi=a\sin\theta\cos\varphi,\quad \chi_\varphi=0,$$
$$\phi_\theta=a\cos\theta\cos\varphi,\quad \psi_\theta=a\cos\theta\sin\varphi,\quad \chi_\theta=-c\sin\theta.$$

Mit den Koeffizienten der ersten Fundamentalform

$$\begin{aligned}
E &= \phi_\varphi^2 + \psi_\varphi^2 + \chi_\varphi^2 = a^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi = a^2 \sin^2\theta,\\
F &= \phi_\varphi \phi_\theta + \psi_\varphi \psi_\theta + \chi_\varphi \chi_\theta = -a^2 \sin\theta \cos\theta \sin\varphi \cos\varphi + a^2 \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \sin\varphi = 0,\\
G &= \phi_\theta^2 + \psi_\theta^2 + \chi_\theta^2 = a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

ist das Flächenelement in krummlinigen Koordinaten gegeben durch

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta d\varphi = a \sin\theta \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta}.$$

Ferner werden benötigt

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi = a^2 \sin^2\theta,\\
y^2 + z^2 &= a^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\theta,\\
z^2 + x^2 &= c^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
xy &= a^2 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi,\\
yz &= ac \sin\theta \cos\theta \sin\varphi,\\
zx &= ac \cos\theta \sin\theta \cos\varphi.
\end{aligned}$$

Die Integration über den Winkel φ können wir vor das Integralzeichen ziehen. Den Rest formen wir entsprechend um:

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a \sin\theta \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta}\, d\theta d\varphi = 2\pi a \int_0^{\pi} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2\left(1 - \cos^2\theta\right)} \sin\theta d\theta\\
&= 2\pi a \int_0^{\pi} \sqrt{c^2 + \left(a^2 - c^2\right)\cos^2\theta} \sin\theta d\theta = 2\pi a \sqrt{a^2 - c^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + z^2}\, dz.
\end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrals ergibt die Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi a \sqrt{a^2 - c^2}\, \frac{1}{2}\left[z\sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + z^2} + \frac{c^2}{a^2 - c^2}\, ar\sinh \frac{\sqrt{a^2 - c^2}\, z}{c} \right]_{-1}^{1}\\
&= 2\pi a \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right).
\end{aligned}$$

Ferner lauten die Trägheitsmomente

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \sigma \int \left(y^2 + z^2\right) dS\\
&= a\sigma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(a^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\theta\right) \sin\theta \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta}\, d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{yy} &= \sigma \int \left(z^2 + x^2 \right) dS \\
&= a\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(c^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi \right) \sin\theta \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta}\, d\theta d\varphi, \\
J_{zz} &= \sigma \int \left(x^2 + y^2 \right) dS = a\sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \sin^2\theta \sin\theta \sqrt{a^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta}\, d\theta d\varphi.
\end{aligned}
$$

Die Integration über φ kann sogleich ausgeführt werden. Dann vereinfachen sich die Integrale zu

$$
\begin{aligned}
J_{xx} &= \pi a\sigma a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \sqrt{\left(a^2 - c^2\right) \cos^2\theta + c^2}\, d\theta \\
&\quad + \pi a\sigma \left(2c^2 - a^2 \right) \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \sqrt{\left(a^2 - c^2\right) \cos^2\theta + c^2}\, d\theta, \\
J_{yy} &= J_{xx}, \\
J_{zz} &= 2\pi a\sigma a^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \sqrt{\left(a^2 - c^2\right) \cos^2\theta + c^2}\, d\theta \\
&\quad - 2\pi a\sigma a^2 \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \sqrt{\left(a^2 - c^2\right) \cos^2\theta + c^2}\, d\theta.
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution $z = \cos\theta$ folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
J_{xx} &= \pi a\sigma \sqrt{a^2 - c^2} \left(a^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{a^2 - c^2}}\, dz + \left(2c^2 - a^2 \right) \int_{-1}^{1} z^2 \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{a^2 - c^2}}\, dz \right), \\
J_{yy} &= J_{xx}, \\
J_{zz} &= 2\pi\sigma a^3 \sqrt{a^2 - c^2} \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{a^2 - c^2}}\, dz - \int_{-1}^{1} z^2 \sqrt{z^2 + \frac{c^2}{a^2 - c^2}}\, dz \right).
\end{aligned}
$$

Für $c < a$ folgt mit den bereits bekannten Integralen

$$
\begin{aligned}
J_{zz} &= 2\pi\sigma a^3 \sqrt{a^2 - c^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{c^2}{a^2 - c^2} \right) z \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + z^2} - \frac{1}{4} z \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + z^2}^{\,3} \right]_{-1}^{1} \\
&\quad + 2\pi\sigma a^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \frac{c^2}{a^2 - c^2} \right) \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \left[\operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}\, z}{c} \right]_{-1}^{1} \\
&= 2\pi\sigma a \left[\left(1 + \frac{1}{4} \frac{c^2}{a^2 - c^2} \right) \left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arsinh} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right) - \frac{1}{2} \frac{a^3}{a^2 - c^2} \right] a^2.
\end{aligned}
$$

Setzen wir die Oberfläche ein, können wir darin die Masse

$$m = \sigma S = 2\pi\sigma a\left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right)$$

Eliminieren, und wir erhalten die bereits bekannte Formel

$$J_{zz} = \left[1 - \frac{1}{4}\frac{a^2}{a^2-c^2}\frac{4\pi a^2}{S} + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\right]ma^2.$$

Das Trägheitsmoment J_{xx} benutzt dieselben Integrale wie das Trägheitsmoment J_{zz}

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \pi a\sigma a^2\sqrt{a^2-c^2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}}dz - \int_{-1}^{1} z^2\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}}dz\right) \\
&\quad + 2\pi a\sigma c^2\sqrt{a^2-c^2}\int_{-1}^{1} z^2\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}}dz \\
&= \frac{1}{2}J_{zz} + 2\pi a\sigma c^2\sqrt{a^2-c^2}\int_{-1}^{1} z^2\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}}dz.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \frac{1}{2}J_{zz} + 2\pi a\sigma c^2\sqrt{a^2-c^2} \\
&\quad \times\left[\frac{z}{4}\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}}^{\,3} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2-c^2}\left(z\sqrt{z^2+\frac{c^2}{a^2-c^2}} + \frac{c^2}{a^2-c^2}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}\,z}{c}\right)\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2}J_{zz} + \frac{1}{2}\frac{2\pi a\sigma c^2}{a^2-c^2}\left[a^3 - \frac{1}{2}c^2\left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right)\right].
\end{aligned}$$

Setzen wir die Oberfläche ein, ergibt sich nach einigen Umformungen

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{4}\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{4\pi a^2}{S} - \frac{c^2}{a^2}\right)\right]ma^2 + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2-c^2}\left(\frac{4\pi a^2}{S} - \frac{c^2}{a^2}\right)ma^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{4\pi a^2}{S} - \frac{c^2}{a^2}\right)\right]ma^2.
\end{aligned}$$

Mit der bereits oben verwendeten Relation

$$\frac{a^2}{a^2-c^2}\left(\frac{4\pi a^2}{S} - \frac{c^2}{a^2}\right) = 1 + \left(1 + \frac{1}{3}\frac{a}{c}\right)\frac{a^2}{(a+c)^2}$$

wandert der Grenzwert ebenfalls gegen den einer Kugelsphäre.

$$\lim_{c\to a} J_{xx} = \frac{1}{2}ma^2\left[1+\frac{1}{2}\lim_{c\to a}\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{1}{2}\right)\left(1+\left(1+\frac{1}{3}\frac{a}{c}\right)\frac{a^2}{(a+c)^2}\right)\right] = \frac{2}{3}ma^2$$

Die Deviationsmomente sind gegeben durch

$$J_{xy} = \sigma\int xydS = \sigma a^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi,$$

$$J_{yz} = \sigma\int yzdS = \sigma a^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi,$$

$$J_{zx} = \sigma\int zxdS = \sigma a^2c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}\,d\theta d\varphi.$$

Das kann man mit den Substitutionen $z = \cos\theta$ bzw. $z = \sin\theta$ noch ein wenig umformen, so daß man sieht, daß die Integrale über eine Periode des Sinus bzw. Kosinus null sind und daher alle Deviationsmomente verschwinden:

$$J_{xy} = \sigma a^3\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)\sqrt{\left(a^2-c^2\right)z^2+c^2}\,dz = 0,$$

$$J_{yz} = \sigma a^2c\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{0}z^2\sqrt{a^2-\left(a^2-c^2\right)z^2}\,dz = 0,$$

$$J_{zx} = \sigma a^2c\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{0}z^2\sqrt{a^2-\left(a^2-c^2\right)z^2}\,dz = 0.$$

Vergleichen wir ein gleich schweres Rotationsellipsoid mit einer Ellipsoidsphäre, stellen wir fest, daß die Trägheitsmomente der Ellipsoidsphäre bedeutend größer sind als die des Vollellipsoids. Das liegt daran, daß die Masse ausschließlich auf dem Rand konzentriert ist.

