Aufgabe: Berechnen Sie den Trägheitstensor eines Rotationsellipsoids homogener Massendichte.

Lösung: Die Trägheitsmomente eines Rotationsellipsoids homogener Massenverteilung in bezug auf die Achsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
J_{xx} &= \int \left(r^2 - x^2\right) dm = \rho \int \left(y^2 + z^2\right) dxdzdy, \\
J_{yy} &= \int \left(r^2 - y^2\right) dm = \rho \int \left(z^2 + x^2\right) dydxdz, \\
J_{zz} &= \int \left(r^2 - z^2\right) dm = \rho \int \left(x^2 + y^2\right) dzdydx.
\end{aligned}
$$

Die Oberfläche eines Rotationsellipsoids ist im Fall einer Rotation um die z-Achse gegeben durch

$$
\frac{z}{c} = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}.
$$

Daraus folgt das Trägheitsmoment

$$
\begin{aligned}
J_{zz} &= \rho \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dzdydx = \rho \frac{2c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(x^2 + y^2\right) \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dydx \\
&= 2\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} x^2 \left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx + 2\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx.
\end{aligned}
$$

Die beiden Integrale sind elementar lösbar:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy &= \frac{a^2 - x^2}{2} \left[\arcsin \frac{y}{a^2 - x^2} \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{2}\left(a^2 - x^2\right), \\
\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy &= \frac{\left(a^2 - x^2\right)^2}{8} \left[\arcsin \frac{y}{a^2 - x^2} \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\pi}{8}\left(a^2 - x^2\right)^2.
\end{aligned}
$$

Eingesetzt ergibt sich eine Summe einfach zu lösender Integrale:

$$
\begin{aligned}
J_{zz} &= \pi\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \left[x^2 \left(a^2 - x^2\right) + \frac{1}{4}\left(a^2 - x^2\right)^2 \right] dx = \frac{1}{4}\pi\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \left[a^4 + 2a^2x^2 - 3x^4 \right] dx \\
&= \frac{1}{4}\pi\rho \frac{c}{a} \left(a^4 \int\limits_{-a}^{a} dx + 2a^2 \int\limits_{-a}^{a} x^2 dx - 3 \int\limits_{-a}^{a} x^4 dx \right).
\end{aligned}
$$

Führen wir die Integrationen aus, erhalten wir als endgültiges Ergebnis

$$J_{zz} = \frac{1}{4}\pi\rho\frac{c}{a}\left(a^4\left[x\right]_{-a}^{a} + \frac{2}{3}a^2\left[x^3\right]_{-a}^{a} - \frac{3}{5}\left[x^5\right]_{-a}^{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\pi\rho c a^4\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{15}\pi\rho c a^4 = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}a^2 c\rho a^2 = \frac{2}{5}ma^2.$$

Im Fall einer Rotation um die x-Achse ist die Fläche des Ellipsoids über der y-z-Ebene gegeben durch

$$x = \pm\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c}{a}\left(a^2 - y^2\right) - z^2},$$

und die Randkurven als Funktion der unabhängigen Variablen y lauten

$$z = \pm\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Setzen wir diese Grenzen ein, ergibt sich folgendes Doppelintegral:

$$J_{xx} = \rho\int_{-a}^{a}\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\int_{-\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}}\left(y^2 + z^2\right)dxdzdy = 2\rho\frac{a}{c}$$
$$\times\int_{-a}^{a}\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\left(y^2 + z^2\right)\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right) - z^2}\,dzdy,$$

das sich in die beiden einfachen Integrale

$$J_{xx} = 2\rho\frac{a}{c}\int_{-a}^{a}\left\{y^2\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right) - z^2}\,dz + \int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right) - z^2}\,dz\right\}dy$$

trennen läßt. Diese Integrale sind elementar lösbar:

$$\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right) - z^2}\,dz = \frac{1}{2}\left[z\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right) - z^2}\right]_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right)\left[\arcsin\frac{z}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2 - y^2}}\right]_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{\pi}{2}\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - y^2\right)$$

bzw.

$$\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}} z^2\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}\,dz=\left[-\frac{z}{4}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}^{\,3}\right]_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}+\frac{1}{8}\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)$$

$$\times\left[z\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}+\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)\arcsin\frac{z}{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}\right]_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{\pi}{8}\frac{c^4}{a^4}\left(a^2-y^2\right)^2.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in das verbleibende Integral über y ein, folgt der einfache Ausdruck

$$\begin{aligned}J_{xx}&=\pi\rho\frac{c}{a}\int_{-a}^{a}\left\{y^2\left(a^2-y^2\right)+\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)^2\right\}dy\\&=\pi\rho\frac{c}{a}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{1}{4}c^2a^2+\left(a^2-\frac{1}{2}c^2\right)y^2-\left(1-\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2}\right)y^4\right\}dy\\&=2\pi\rho a^2c\left\{\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{3}\left(a^2-\frac{1}{2}c^2\right)-\left(1-\frac{1}{4}\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{a^2}{5}\right\}\\&=\frac{4\pi}{15}\rho a^2c\left(c^2+a^2\right)=\frac{1}{5}m\left(c^2+a^2\right).\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist $J_{yy}=J_{xx}$. Einfacher ist es, Zylinderkoordinaten zu verwenden:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z\left(r,\varphi\right).$$

Mit dem Volumenelement $dV=rdrd\varphi dz$ lauten die Integrale über das Rotationsellipsoid:

$$J_{xx}=\rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}\left(r^2\sin^2\varphi+z^2\right)rdrd\varphi dz,$$

$$J_{yy}=\rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}\left(z^2+r^2\cos^2\varphi\right)rdrd\varphi dz,$$

$$J_{zz}=\rho\int_0^a\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}r^3drd\varphi dz.$$

Da es sich um einen Rotationskörper handelt, kann die Integration über φ vor das Integralzeichen gezogen werden,

$$J_{xx}=\rho\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\right)\int_0^a\left(\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}dz\right)r^3dr+\rho\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\int_0^a\left(\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}z^2dz\right)rdr,$$

$$J_{yy}=\rho\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\int_0^a\left(\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}z^2dz\right)rdr+\rho\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right)\int_0^a\left(\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}dz\right)r^3dr,$$

$$J_{zz}=\rho\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right)\int_0^a\left(\int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}dz\right)r^3dr.$$

Führen wir die Integrationen über φ und z aus, verbleibt nur noch die Integration über r:

$$J_{xx}=2\pi\rho\frac{c}{a}\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}dr+\frac{4\pi}{3}\rho\frac{c^3}{a^3}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}^3dr,$$

$$J_{yy}=\frac{4\pi}{3}\rho\frac{c^3}{a^3}\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}^3dr+2\pi\rho\frac{c}{a}\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}dr,$$

$$J_{zz}=4\pi\rho\frac{c}{a}\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}dr,$$

die wir mit Hilfe der Integrale

$$\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}dr=\left[\frac{1}{5}\sqrt{a^2-r^2}^5-\frac{a^2}{3}\sqrt{a^2-r^2}^3\right]_0^a=\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}=\frac{2}{15}a^5,$$

$$\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}^3dr=-\frac{1}{5}\left[\sqrt{a^2-r^2}^5\right]_0^a=\frac{a^5}{5}$$

elementar ausführen können:

$$J_{xx}=2\pi\rho\frac{c}{a}\frac{2}{15}a^5+\frac{4\pi}{3}\rho\frac{c^3}{a^3}\frac{a^5}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho a^2c\right)\left(a^2+c^2\right)=\frac{1}{5}m\left(a^2+c^2\right),$$

$$J_{yy}=\frac{4\pi}{3}\rho\frac{c^3}{a^3}\frac{a^5}{5}+2\pi\rho\frac{c}{a}\frac{2}{15}a^5=J_{xx},$$

$$J_{zz}=4\pi\rho\frac{c}{a}\frac{2}{15}a^5=\frac{2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho a^2c\right)a^2=\frac{2}{5}ma^2.$$

Aus Symmetriegründen gilt $J_{xx}=J_{yy}$. Die Deviationsmomente sind gegeben durch

$$J_{xy}=\int xydm=\rho\int xydV,$$

$$J_{yz}=\int yzdm=\rho\int yzdV,$$

$$J_{zx}=\int zxdm=\rho\int zxdV.$$

Das Moment J_{xy} berechnen wir wie folgt:

$$J_{xy} = \rho \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}} xydzdydx = 2\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dydx$$

$$= 2\rho \frac{c}{a} \int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy \right) xdx$$

Da das Integral

$$\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy = -\frac{1}{3}\left[\sqrt{a^2-x^2-y^2}^{\,3} \right]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} = 0$$

verschwindet, ist auch das Deviationsmoment null. Aus dem gleichen Grund verschwindet auch das Deviationsmoment

$$J_{yz} = \rho \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}} \int\limits_{-\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}} yzdxdzdy = 2\rho \frac{a}{c} \int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-y^2}} z\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\left(a^2-y^2\right)-z^2}\,dz \right) ydy,$$

und aus Symmetriegründen ist auch $J_{zx} = 0.$ Wechseln wir zu Zylinderkoordinaten über, verschwinden die Deviationsmomente auch in diesem Koordinatensystem:

$$J_{xy} = \rho \int\limits_{0}^{a} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} r^3 dr \cos\varphi \sin\varphi d\varphi dz = \rho \left(\int\limits_{0}^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \right) \int\limits_{0}^{a} \left(\int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} dz \right) r^3 dr = 0,$$

$$J_{yz} = \rho \int\limits_{0}^{a} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} r^2 dr \sin\varphi d\varphi zdz = \rho \left(\int\limits_{0}^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \right) \int\limits_{0}^{a} \left(\int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} dz \right) r^2 dr = 0,$$

$$J_{zx} = \rho \int\limits_{0}^{a} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} r^2 dr \cos\varphi d\varphi zdz = \rho \left(\int\limits_{0}^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \right) \int\limits_{0}^{a} \left(\int\limits_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^2-r^2}} dz \right) r^2 dr = 0.$$

Somit sind alle Momente Hauptträgheitsmomente. Damit lautet die Koeffizientendeterminante der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} J_{xx}-J & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy}-J & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz}-J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{xx}-J & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}-J & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}-J \end{vmatrix} = \left(J_{xx}-J\right)\left(J_{yy}-J\right)\left(J_{zz}-J\right).$$

In dieser ist die Symmetrie des Trägheitstensors bereits berücksichtigt. Die Eigenwerte sind somit gegeben durch

$$J_1 = J_{xx}, \quad J_2 = J_{yy}, \quad J_3 = J_{zz}.$$

Eigenvektoren sind die Koordinatenachsen x, y und z.

