Aufgabe: Vergleichen Sie den Trägheitstensor einer Vollkugel homogener Massendichte mit einer Sphäre homogener Massebelegung.

Lösung: Die Trägheitsmomente einer Kugel in bezug auf die Achsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems sind gegeben durch

$$J_{xx}=\int\left(r^2-x^2\right)dm=\rho\int\left(y^2+z^2\right)dV=\rho\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}\left(y^2+z^2\right)dxdzdy,$$

$$J_{yy}=\int\left(r^2-y^2\right)dm=\rho\int\left(z^2+x^2\right)dV=\rho\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}}\int_{-\sqrt{R^2-z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-x^2}}\left(z^2+x^2\right)dydxdz,$$

$$J_{zz}=\int\left(r^2-z^2\right)dm=\rho\int\left(x^2+y^2\right)dV=\rho\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dzdydx.$$

Wegen der zyklischen Vertauschung der Variablen brauchen wir nur eines der Volumenintegrale zu lösen, z.B.

$$J_{zz}=\rho\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(x^2+y^2\right)\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz\right)dydx=2\rho\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dydx$$

$$=2\rho\int_{-R}^{R}x^2\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx+2\rho\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx.$$

Führen wir mit Hilfe der Integrale

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\left[y\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}+\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)$$
$$\times\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{\pi}{2}\left(R^2-x^2\right)$$

und

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy=-\frac{1}{4}\left[y\sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,3}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}$$
$$+\frac{1}{8}\left(R^2-x^2\right)\left[y\sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,3}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}+\frac{1}{8}\left(R^2-x^2\right)^2$$
$$\times\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{\pi}{8}\left(R^2-x^2\right)^2$$

die Integration über y aus, so folgt

$$J_{zz} = \pi\rho \int_{-R}^{R} x^2\left(R^2 - x^2\right)dx + \frac{\pi}{4}\rho \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\pi\rho R^4 \int_{-R}^{R} dx + \frac{1}{2}\pi\rho R^2 \int_{-R}^{R} x^2 dx - \frac{3}{4}\pi\rho \int_{-R}^{R} x^4 dx.$$

Die Integration über die letzte Variable x liefert dann das Trägheitsmoment

$$J_{zz} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\rho R^3 R^2 = \frac{2}{5} m R^2.$$

Aus Symmetriegründen gilt $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz}$. Die Deviationsmomente sind gegeben durch

$$J_{xy} = \int xy dm = \rho \int xy dV = \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} xydzdydx,$$

$$J_{yz} = \int yz dm = \rho \int yz dV = \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} yzdxdzdy,$$

$$J_{zx} = \int zx dm = \rho \int zx dV = \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \int_{-\sqrt{R^2-z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-x^2}} zxdydxdz.$$

Das erste Deviationsmoment berechnen wir wie folgt:

$$J_{xy} = \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) xydydx = 2\rho \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) xdx,$$

doch bereits das Integral über y verschwindet:

$$J_{xy} = -\frac{2}{3}\rho \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}^{\,3} \right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} xdx = 0.$$

Ähnlich folgt

$$J_{yz} = \rho \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dx \right) yzdzdy = 2\rho \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} z\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\, dz \right) ydy,$$

und wegen

$$J_{yz} = -\frac{2}{3}\rho \int_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}^{\,3} \right]_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} ydy = 0$$

verschwindet auch dieses Moment. Wie nicht anders zu erwarten, ist auch das letzte Moment

$$J_{zx} = \rho \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-x^2}} dy \right) zxdxdz = 2\rho \int\limits_{-R}^{R} \left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} x\sqrt{R^2-z^2-x^2}\,dx \right) zdz$$

gleich null, denn

$$J_{zx} = -\frac{2}{3}\rho \int\limits_{-R}^{R} \left[\sqrt{R^2-z^2-x^2}^{\,3} \right]_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} zdz = 0.$$

Somit sind alle Momente Hauptträgheitsmomente. Damit lautet die Koeffizientendeterminante der charakteristischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} J_{xx}-J & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy}-J & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz}-J \end{vmatrix} = (J_{xx}-J)(J_{yy}-J)(J_{zz}-J)$$
$$+J_{yz}^2(J_{xx}-J)+J_{xz}^2(J_{yy}-J)+J_{xy}^2(J_{zz}-J)+2J_{xy}J_{yz}J_{xz}.$$

In dieser ist die Symmetrie des Trägheitstensors bereits berücksichtigt. Um nun die Eigenwerte zu ermitteln, muß die Koeffizientendeterminante verschwinden. Da die Diagonalelemente null sind, vereinfacht sich der Ausdruck weiter,

$$\begin{vmatrix} J_{xx}-J & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}-J & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}-J \end{vmatrix} = (J_{xx}-J)(J_{yy}-J)(J_{zz}-J) = 0.$$

Die Eigenwerte sind somit gegeben durch

$$J_1 = J_{xx}, \quad J_2 = J_{yy}, \quad J_3 = J_{zz}.$$

Eigenvektoren sind die Koordinatenachsen *x*, *y* und *z*. Mit Hilfe von Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta$$

gelangt man etwas schneller ans Ziel. Das Volumenelement in Kugelkoordinaten lautet

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Ersetzen wir das kartesische Volumenelement durch das Kugelkoordinatenvolumenelement, ergeben sich für die Trägheitsmomente folgende Bestimmungsgleichungen:

$$J_{xx} = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta\right) r^4 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$J_{yy} = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta\right) r^4 dr \sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$J_{zz} = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta r^4 dr \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Die Integrationen können mit Hilfe der Integrale

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = \frac{2}{3}$$

elementar ausgeführt werden, so daß

$$J_{xx} = \frac{\pi}{5} R^5 \rho \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta + \frac{2\pi}{5} R^5 \rho \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{2}{5} mR^2,$$

$$J_{yy} = \frac{\pi}{5} R^5 \rho \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta + \frac{2\pi}{5} R^5 \rho \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{2}{5} mR^2,$$

$$J_{zz} = \frac{2\pi}{5} \rho R^5 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{2}{5} mR^2.$$

Die Deviationsmomente verschwinden wie erwartet ebenfalls identisch:

$$J_{xy} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi d\varphi = 0,$$

$$J_{yz} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \cos\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0,$$

$$J_{zx} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \cos\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0,$$

da das Integral über eine Periode des Sinus bzw. Kosinus null ist.

Für die massenbelegte Sphäre hingegen kommen eigentlich nur Kugelkoordinaten in Frage. Das Flächenelement in sphärischen Koordinaten lautet

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Ersetzen wir die Massendichte ρ durch die Flächendichte $\sigma,$ lautet das Massenelement

$$dm = \rho dV = \sigma dS,$$

und wir können die Trägheitsmomente wie folgt schreiben:

$$J_{xx} = \sigma \int \left(R^2 - x^2 \right) dS = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \right) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$J_{yy} = \sigma \int \left(R^2 - y^2 \right) dS = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$J_{zz} = \sigma \int \left(R^2 - z^2 \right) dS = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \theta \right) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Dabei haben wir den variablen Radius *r* durch den konstanten Kugelradius *R* ersetzt. Aufgrund fehlender funktionaler Abhängigkeiten lassen sich die Integrale elementar auswerten:

$$J_{xx} = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta - \sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$J_{yy} = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta - \sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi,$$

$$J_{zz} = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta,$$

und wir erhalten als Ergebnis

$$J_{xx} = 4\pi\sigma R^4 - \frac{4\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{8\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{2}{3} m R^2,$$

$$J_{yy} = 4\pi\sigma R^4 - \frac{4\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{8\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{2}{3} m R^2,$$

$$J_{zz} = \frac{8\pi}{3} \sigma R^4 = \frac{2}{3} m R^2.$$

Die Deviationsmomente verschwinden wie bei der Kugel:

$$J_{xy} = \int xydm = \sigma \int xydS = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0,$$

$$J_{yz} = \int yzdm = \rho \int yzdV = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

$$J_{zx} = \int zxdm = \rho \int zxdV = \sigma R^4 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0.$$

Vergleichen wir eine gleich schwere Vollkugel mit einer Sphäre, stellen wir fest, daß die Trägheitsmomente der Sphäre bedeutend größer sind als die der Vollkugel. Das liegt daran, daß die Masse ausschließlich auf dem Rand konzentriert ist.

