Aufgabe: Berechnen Sie den Umkreismittelpunkt einer 24stel-Sphäre und zeigen Sie, daß dieser außerhalb des Dreiecks liegt.

Lösung: Als 24stel-Sphäre bezeichnet man ein aus einer Achtelsphäre herausgeschnittenes gleichschenkliges Kugeldreieck. Sei ΔABC eines von 4 solchen kongruenten Kugeldreiecken, die ihren gemeinsamen Scheitel im Punkt C haben. Der Abstand der Eckpunkte vom Umkreismittelpunkt Z sei ρ. Weil nun im rechtwinkligen Kugeldreieck ΔAZD die Hypotenuse stets größer ist als die Kathete, gilt $\rho > c/2$. Da die Summe $a+d=c$ ist und außerdem $d<a$, ist $d<c/2$ und somit $\rho - d > 0$. Damit liegt der Umkreismittelpunkt Z außerhalb des gleichschenkligen Dreiecks ΔABC. Es gilt nun, den Umkreisradius ρ zu berechnen.

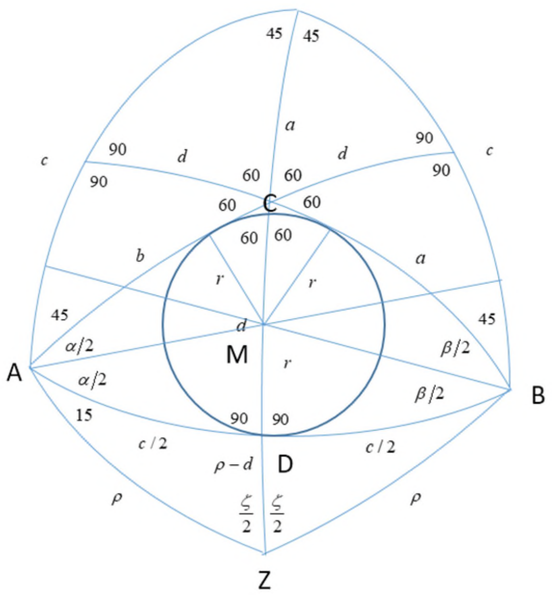

Abbildung 1. Gleichschenkliges Kugeldreieck ABC einer 24stel-Sphäre

Wir wissen von der Achtelsphäre aus Aufgabe [[160](#)], daß

$$a = \arctan\sqrt{2}, \quad \sin a = \frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

und daß im gleichschenkligen Dreieck aus Symmetriegründen $b=a$ ist. Die Kantenlänge d ist ebenfalls bekannt:

$$d = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin d = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Schließlich ist

$$c = \frac{\pi}{2}, \quad \sin c = 1, \quad \cos c = 0,$$

und wegen

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$$

bzw.

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{2}{4}$$

gilt

$$\gamma = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{2}.$$

Nach dem Winkelkosinussatz im Dreieck ΔBCZ ist

$$\cos\frac{\zeta}{2} = -\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos a = -\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}\sqrt{1-\sin^2 \arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}.$$

Daraus folgt der Winkel

$$\frac{\zeta}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{2}{3}}\right) = \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{4} = 1{,}387 = 79{,}45°.$$

Alternativ können wir den Winkel $\zeta/2$ aus dem Dreieck ΔAZD berechnen:

$$\cos\frac{\zeta}{2} = -\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{c}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{6}}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}.$$

Daraus ergibt sich ein zu oben identischer Winkel,

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{2} &= \arccos\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{8}} = \arccos\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\sqrt{3}} = \arccos\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{4}} \\ &= \arccos\left(\sin\frac{3\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}\right) = \arccos\frac{\sqrt{3}-1}{4}.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Umkreisradius verwenden wir den Sinussatz in folgender Form:

$$\frac{\sin\rho}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\zeta}{2}}.$$

In diesen Ausdruck können wir alle bekannten Größen einsetzen, womit wir erhalten:

$$\sin\rho=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{\zeta}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{16-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{8-\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\frac{2}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}.$$

Daraus folgt der Umkreisradius

$$\rho=\arcsin\frac{2}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}=0,8027=45,99^\circ\approx 46^\circ.$$

Wir machen noch die Probe aufs Exempel mittels des Sinussatzes im Dreieck ΔAZD,

$$\sin\left(\rho-d\right)=\frac{\sin\frac{\gamma}{4}\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{\zeta}{2}}=\frac{4\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{16-\left(\sqrt{3}-1\right)^2}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{6+\sqrt{3}}},$$

und erhalten für die Seitenlänge

$$\rho-d=\arcsin\frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}=0,187=10,7^\circ.$$

Das Ergebnis ist identisch:

$$\rho=\arcsin\frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{\sqrt{6+\sqrt{3}}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}=0,1872+0,6155=0,8027=45,99^\circ.$$

Die Radien von In- und Umkreis erhalten wir einfacher mit Hilfe des Halbumfangs und des Eckensinus. Dabei ist der Halbumfang gegeben durch

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\arctan\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}.$$

Mittels der Hilfsgrößen

$$s-a=\frac{\pi}{4},\quad s-b=\frac{\pi}{4},\quad s-c=\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}$$

ergeben sich die benötigten Sinusfunktionen

$$\sin\left(s-a\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(s-b\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin(s-c)=\sin\left(\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\arctan\sqrt{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\arctan\sqrt{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\tan\arctan\sqrt{2}}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\sqrt{2}}}\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\sqrt{2}}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin s=\sin\left(\arctan\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\arctan\sqrt{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\arctan\sqrt{2}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\tan\arctan\sqrt{2}}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\sqrt{2}}}\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\sqrt{2}}}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Die bereits bekannten Winkel des Dreiecks ΔABC ergeben sich aus den Halbwinkelsätzen:

$$\alpha=2\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}=2\arctan\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\pi}{4},$$
$$\beta=2\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\cdot\sin(s-b)}}=2\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-c)}{\sin s}}=\frac{\pi}{4},$$
$$\gamma=2\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-c)}}=2\arctan\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3},$$

woraus der Umkreisradius übereinstimmend mit dem Sinussatz gemäß folgender Formel folgt:

$$\rho=\arctan\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}=\arctan\frac{2\sin^2\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin(s-a)\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-c)}}$$
$$=\arctan\frac{(1-\cos a)\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\arctan\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=45{,}99°.$$

Der Abstand des Aufpunktes D zum Mittelpunkt M des gleichschenkligen Dreiecks ist gleich dem Inkreisradius

$$r=\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}=\arctan\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$
$$=\arctan\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=16{,}3°.$$

Der Inkreisradius ist damit größer als die Seitenlänge $\rho-d=10{,}7°$. Er ergibt sich aus dem Schnitt der drei Winkelhalbierenden und fällt nicht mit dem Massenschwerpunkt zusammen, welcher im Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden liegt.

Anhang

```
% Programm umkreis
% Berechnet In- und Umkreis von sphärischen Dreiecken
% mit den Kantenlängen a, b, c und den Winkeln alpha, beta, gammma
clear all

% 24stel-Sphäre
a = atan(sqrt(2));
b = a;
c = pi/2;

% Halbumfang s
s =(a+b+c)/2;

% Halbwinkelsätze
alpha = 2*atan(sqrt(sin(s-b)*sin(s-c)/sin(s)/sin(s-a)));
alpha_grad = alpha/pi*180
beta = 2*atan(sqrt(sin(s-c)*sin(s-a)/sin(s)/sin(s-b)));
beta_grad = beta/pi*180
gamma = 2*atan(sqrt(sin(s-a)*sin(s-b)/sin(s)/sin(s-c)));
gamma_grad = gamma/pi*180

% Eckensinus S
S = 2*sqrt(sin(s)*sin(s-a)*sin(s-b)*sin(s-c));

% Umkreisradius rho
rho = atan(4*sin(a/2)*sin(b/2)*sin(c/2)/S);
rho_grad = rho/pi*180

% Alternative Formel
rho_alternative =
atan(4*sin(a/2)*sin(b/2)*sin(c/2)/sin(a)/sin(b)/sin(gamma));
rho_alternative_grad =rho_alternative/pi*180

% Analytischer Wert 24stel-Sphäre
rho_analytisch = asin(2/sqrt(6+sqrt(3)))
rho_analytisch_grad =rho_analytisch/pi*180

% Inkreisradius r
r = atan(sqrt(sin(s-a)*sin(s-b)*sin(s-c)/sin(s)));
r_grad = r/pi*180

% Analytischer Wert 24stel-Sphäre
r_analytisch =atan((sqrt(2)-1)/sqrt(2));
r_analytisch_grad = r_analytisch/pi*180
```

