Aufgabe: Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Achtelsphäre mit Hilfe von Umkreis und Inkreis.

Lösung: Die drei Mittelsenkrechten einer Achtelsphäre (Abb. 1) schneiden sich im Umkreismittelpunkt *Z*.

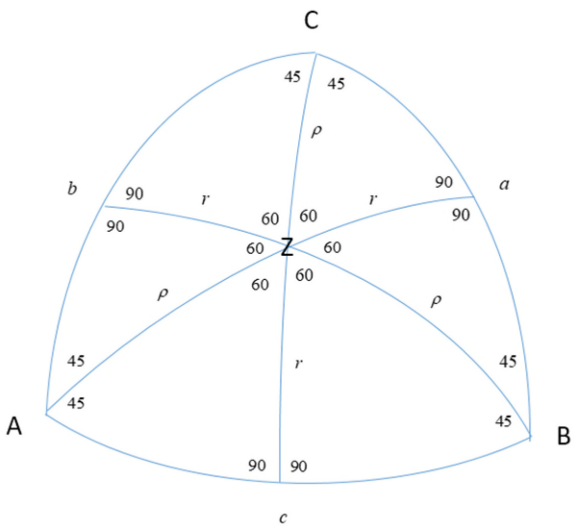

Abbildung 1. Sphärisches Dreieck einer Achtelkugel

Sei ρ der Umkreisradius des sphärischen Dreiecks im Unterschied zum Kugelradius *R*. In Formelsammlungen finden wir zwei verschiedene Formeln, um den Umkreisradius zu berechnen. Die erste lautet

$$\rho = \arctan \frac{4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{1 - \left(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c\right) + 2 \cos a \cos b \cos c}},$$

wobei *a*, *b* und *c* die Dreiecksseiten sind. Mit dem Halbumfang $s = (a+b+c)/2$ kann der Ekkensinus *S* umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{1 - \left(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c\right) + 2 \cos a \cos b \cos c} \\ &= 2\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}, \end{aligned}$$

womit wir alternativ auch die Formel

$$\rho = \arctan \frac{2 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}{\sqrt{\sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{-a+b+c}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a+b-c}{2}}}$$

verwenden können. Für die Achtelsphäre mit den Seitenlängen $a=b=c=\pi/2$ ergibt sich demnach ein Umkreisradius von

$$\rho=\arctan\frac{2\sin^3\frac{a}{2}}{\sqrt{\sin\frac{3a}{2}\sin^3\frac{a}{2}}}=\arctan\frac{2\sin^3\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\sin\frac{3\pi}{4}\sin^3\frac{\pi}{4}}}=\arctan\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arctan\sqrt{2},$$

was genau dem Abstand der Ecken zum Umkreismittelpunkt

$$\rho=\arctan\sqrt{2}=\arctan\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{3}}}=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

aus Aufgabe [160] entspricht. Die alternative Formel

$$\rho=\arctan\frac{4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{\sin a\sin b\sin\gamma}=\arctan\frac{4\sin^3\frac{a}{2}}{\sin^2 a}=\arctan\frac{4\sin^3\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}$$
$$=\arctan\left(4\sin^3\frac{\pi}{4}\right)=\arctan\sqrt{2}$$

führt zum selben Ergebnis. Ähnlich ergibt sich der Inkreis r zu

$$r=\arctan\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$
$$=\arctan\frac{\sqrt{\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}}}.$$

Bei den drei gleichen Seiten einer Achtelsphäre vereinfacht sich dieser Ausdruck wieder zu

$$r=\arctan\sqrt{\frac{\sin^3\frac{a}{2}}{\sin\frac{3a}{2}}}=\arctan\sqrt{\frac{\sin^3\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}}}=\arctan\sin\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{\sqrt{2}}{2},$$

was genau dem Komplement zu ρ entspricht. Umkreis und Inkreis addieren sich nämlich exakt zur Kantenlänge a:

$$\rho+r=\arctan\sqrt{2}+\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}=\arctan\frac{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\pi}{2}=a.$$

Anhang

```
% Programm umkreis
% Berechnet In- und Umkreis von sphärischen Dreiecken
% mit den Kantenlängen a, b, c und den Winkeln alpha, beta, gammma

% Achtelsphäre
a = pi/2;
b = pi/2;
c = pi/2;

% Halbwinkelsätze
alpha = 2*atan(sqrt(sin(s-b)*sin(s-c)/sin(s)/sin(s-a)))
beta = 2*atan(sqrt(sin(s-c)*sin(s-a)/sin(s)/sin(s-b)))
gamma = 2*atan(sqrt(sin(s-a)*sin(s-b)/sin(s)/sin(s-c)))

% Umkreisradius rho
% Halbumfang s
s =(a+b+c)/2;
% Eckensinus S
S = 2*sqrt(sin(s)*sin(s-a)*sin(s-b)*sin(s-c));
rho = atan(4*sin(a/2)*sin(b/2)*sin(c/2)/S)
% Alternative Formel
rho_alternative =
atan(4*sin(a/2)*sin(b/2)*sin(c/2)/sin(a)/sin(b)/sin(gamma))
% Analytischer Wert
rho_analytisch = atan(sqrt(2))

% Inkreisradius r
r = atan(sqrt(sin(s-a)*sin(s-b)*sin(s-c)/sin(s)))
% Analytischer Wert
r_analytisch =atan(sqrt(2)/2)
```

```
>> umkreis

alpha = 1.5708

beta = 1.5708

gamma = 1.5708

rho = 0.9553

rho_alternative = 0.9553

rho_analytisch = 0.9553



r = 0.6155

r_analytisch = 0.6155
```

