Aufgabe: Berechnen Sie den Flächenschwerpunkt einer Achtelsphäre.

Lösung: Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Aufgabe zu lösen. Eine der einfachsten ist die Bestimmung des Schnittpunktes dreier Orthodromen. Wir zerlegen dazu die Achtelsphäre in Abb. 1 in sechs rechtwinklige sphärische Dreiecke und fassen jeweils zwei davon, die einander benachbart sind, zu einem gleichschenkligen sphärischen Dreieck zusammen, derart, daß ihre Scheitel im Schnittpunkt der drei Seiten- bzw. Winkelhalbierenden liegen. Dabei sei a die Länge eines Achtelkreises. Die Länge der Orthodrome von jeder der drei Ecken zum Schnittpunkt werde mit c bezeichnet. Das zweite Teilstück vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite sei b. Der Winkel γ zwischen a und b beträgt demnach 90°. Der Winkel β, den die Seite c mit der Seite a einschließt, ist aus Symmetriegründen gleich 45°. Gesucht sind der dritte Winkel α zwischen b und c und die Längen b und c. Den vorweggenommenen Wert für α von 60° haben wir bereits eingezeichnet.

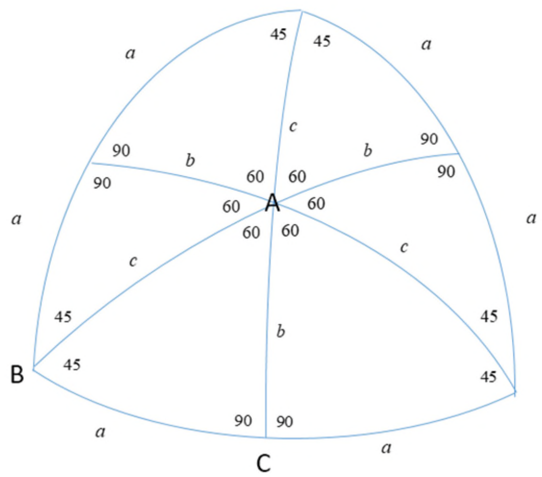

Abbildung 1. Schwerpunkt A einer Achtelsphäre

Aus der Abbildung können wir die folgenden trivialen Relationen ableiten:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\gamma = 1,$$

$$\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Den Winkel α berechnen wir aus dem Sinussatz

$$\sin\alpha = \frac{\sin\gamma \sin a}{\sin c} = \frac{\sin a}{\sin c}$$

Die Größe a ergibt sich für den Einheitskreis $R = 1$ zu

$$a = \frac{2\pi R}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Mittels der Relation $b+c=2a$ folgt aus dem Sinussatz

$$\sin b=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\sin c=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\left(2a-b\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}\cos b-\cos\frac{\pi}{2}\sin b\right]=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos b$$

bzw.

$$b=\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mit den Relationen

$$\sin a=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und

$$\sin c=\sin\left(2a-b\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\cos\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

folgt der Winkel α aus dem Sinussatz

$$\sin\alpha=\frac{\sin a}{\sin c}=\sqrt{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sin\frac{\pi}{3}.$$

Mithin ist $\alpha=60°.$ Man kann zeigen, daß

$$b+c=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{2}{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{1}{3}}\right)$$
$$=\arcsin\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}=2a.$$

