Aufgabe: Erläutern Sie anhand eines Modells und unter der Annahme, daß es Arme, eine Mittelschicht und Reiche gibt und keine direkten Übergänge von Arm nach Reich und umgekehrt stattfinden, wie soziale Marktwirtschaft funktioniert.

Lösung: Die Armen können mit der Rate $-k_{AB}$ in den Mittelstand aufsteigen, ihre Zahl wird dadurch geringer, daher das Minuszeichen. Umgekehrt können Mittelständler sozial absteigen und die Zahl der Armen mit der Rate k_{BA} erhöhen. Mittelständler können aber genausogut mit der Rate k_{BC} die Zahl der Reichen erhöhen, ebenso wie die Reichen mit der Rate $-k_{CB}$ in den Mittelstand absinken können. Die Zahl der Mittelständler muß sich mit derselben Rate k_{AB}, mit der die Zahl der Armen abnimmt, erhöhen und ebenfalls mit der Rate k_{CB}, mit der die Zahl der Reichen, die in den Mittelstand abrutschen, abnimmt. Schließlich gibt der Mittelstand mit der Rate $-k_{BA}$ Verlierer an die Schicht der Armen ab und Gewinner mit der Rate $-k_{BC}$ an die Reichen. Das alles ist in Abb. 1 dargestellt.

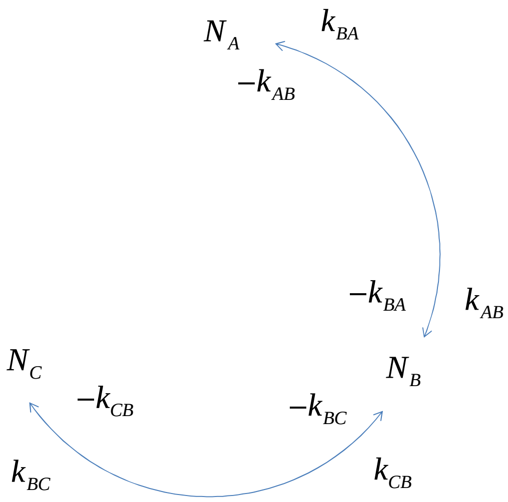

Abbildung 1. Ratenübergänge zwischen den Wohlstandsklassen

Die graphische Veranschaulichung läßt sich zu folgenden Ratengleichungen zusammenfassen:

$$\frac{dN_A}{dt} = -k_{AB}N_A + k_{BA}N_B,$$
$$\frac{dN_B}{dt} = k_{AB}N_A - \left(k_{BA} + k_{BC}\right)N_B + k_{CB}N_C,$$
$$\frac{dN_C}{dt} = k_{BC}N_B - k_{CB}N_C.$$

In der Summe aller Ratengleichungen ergeben sich aber keine Änderungen, weil die Zahl der an der Volkswirtschaft Beteiligten gemäß unserer Annahme konstant ist,

$$\frac{d\left(N_A + N_B + N_C\right)}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_A + N_B + N_C = N_0.$$

In Matrixschreibweise lauten die Ratengleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot N_A \\ \dot N_B \\ \dot N_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{AB} & k_{BA} & 0 \\ k_{AB} & -\left(k_{BA}+k_{BC}\right) & k_{CB} \\ 0 & k_{BC} & -k_{CB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_A \\ N_B \\ N_C \end{pmatrix}.$$

Der Wurzel z entspricht das System partikulärer Lösungen

$$N_A(t) = A_1 e^{zt}, \quad N_B(t) = A_2 e^{zt}, \quad N_C(t) = A_3 e^{zt}$$

mit den Ableitungen

$$\dot N_A(t) = zA_1 e^{zt}, \quad \dot N_B(t) = zA_2 e^{zt}, \quad \dot N_C(t) = zA_3 e^{zt}.$$

Setzen wir diese Größen in das Gleichungssystem ein und kürzen auf beiden Seiten die Exponentialfunktionen, erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -\left(k_{AB}+z\right) & k_{BA} & 0 \\ k_{AB} & -\left(k_{BA}+k_{BC}+z\right) & k_{CB} \\ 0 & k_{BC} & -\left(k_{CB}+z\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dessen Determinante liefert die charakteristische Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -k_{AB}-z & k_{BA} & 0 \\ k_{AB} & -\left(k_{BA}+k_{BC}\right)-z & k_{CB} \\ 0 & k_{BC} & -k_{CB}-z \end{vmatrix} &= -z^3 - pz^2 - qz = -\left(z^2+pz+q\right)z \\ &= -\left(z+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(z+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)z = 0 \end{aligned}$$

mit den drei einfachen Wurzeln

$$z_1 = -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad z_2 = -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \quad z_3 = 0,$$

wobei

$$p = k_{AB}+k_{BA}+k_{BC}+k_{CB}, \quad q = k_{AB}k_{CB}+k_{AB}k_{BC}+k_{CB}k_{BA},$$

d.h.

$$\begin{vmatrix} -k_{AB}-z & k_{BA} & 0 \\ k_{AB} & -\left(k_{BA}+k_{BC}\right)-z & k_{CB} \\ 0 & k_{BC} & -k_{CB}-z \end{vmatrix} = -\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right) = 0.$$

Die Eigenvektoren des Systems sind gegeben durch

$$A_2 = \frac{k_{AB} + z_1}{k_{BA}} A_1, \quad A_3 = -\frac{k_{BA} + k_{AB} + z_1}{k_{BA}} A_1,$$
$$B_2 = \frac{k_{AB} + z_2}{k_{BA}} B_1, \quad B_3 = -\frac{k_{BA} + k_{AB} + z_2}{k_{BA}} B_1,$$
$$C_2 = \frac{k_{AB}}{k_{BA}} C_1, \qquad C_3 = -\frac{k_{BA} + k_{AB}}{k_{BA}} C_1.$$

Die allgemeine Lösung ist die Summe der partikulären Lösungen

$$N_A(t) = e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} \right) + C_1,$$

$$N_B(t) = \frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB} - \frac{p}{2} \right) e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} \right)$$
$$+\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\, e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} - B_1 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} \right) + \frac{k_{AB}}{k_{BA}} C_1,$$

$$N_C(t) = -\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA} + k_{AB} - \frac{p}{2} \right) e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} \right)$$
$$-\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\, e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} - B_1 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t} \right) - \frac{k_{BA} + k_{AB}}{k_{BA}} C_1.$$

Damit können die Koeffizienten aus dem folgenden System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten bestimmt werden,

$$N_A(0) = A_1 + B_1 + C_1,$$
$$N_B(0) = \frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB} - \frac{p}{2} \right)(A_1 + B_1) + \frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,(A_1 - B_1) + \frac{k_{AB}}{k_{BA}} C_1,$$
$$N_C(0) = -\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA} + k_{AB} - \frac{p}{2} \right)(A_1 + B_1) - \frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,(A_1 - B_1) - \frac{k_{BA} + k_{AB}}{k_{BA}} C_1,$$

was in der Summe null ergibt, $N_A(0) + N_B(0) + N_B(0) = 0.$

Durch Einsetzen von $C_1 = N_A(0) - (A_1 + B_1)$ in die beiden anderen Gleichungen folgt

$$N_B(0) - \frac{k_{AB}}{k_{BA}} N_A(0) = -\frac{1}{k_{BA}}\frac{p}{2}(A_1 + B_1) + \frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,(A_1 - B_1),$$
$$N_C(0) + \frac{k_{BA} + k_{AB}}{k_{BA}} N_A(0) = \frac{1}{k_{BA}}\frac{p}{2}(A_1 + B_1) - \frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,(A_1 - B_1).$$

Die Addition beider Gleichungen führt zu

$$N_A(0)+N_B(0)+N_C(0)=N_0,$$

wenn man von $N_C(0)$ die Gesamtzahl N_0 abzieht. Dies ändert an den Lösungen nichts, verhindert aber, daß N_C negativ werden kann. Durch Umformung erhalten wir schließlich

$$N_B(0)-\frac{k_{AB}}{k_{BA}}N_A(0)=\frac{1}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)A_1-\frac{1}{k_{BA}}\left(\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)B_1,$$
$$N_C(0)+\frac{k_{BA}+k_{AB}}{k_{BA}}N_A(0)=-\frac{1}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)A_1-\frac{1}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)B_1.$$

Mit den Ableitungen verfahren wir ähnlich:

$$\dot{N}_A(t)=-\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right),$$

$$\dot{N}_B(t)=-\frac{p}{2}\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)+\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB}-\frac{p}{2}\right)\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)-\frac{p}{2}\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)$$
$$+\frac{1}{k_{BA}}\left(\frac{p^2}{4}-q\right)e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right),$$

$$\dot{N}_C(t)=\frac{p}{2}\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA}+k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)-\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA}+k_{AB}-\frac{p}{2}\right)$$
$$\times\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)+\frac{p}{2}\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)-\frac{1}{k_{BA}}\left(\frac{p^2}{4}-q\right)e^{-\frac{p}{2}t}\left(A_1e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+B_1e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right).$$

Addieren wir wieder alle drei Gleichungen, so folgt

$$\dot{N}_A(t)+\dot{N}_B(t)+\dot{N}_C(t)=0.$$

Die Anfangsbedingungen der Ableitungen sind damit gegeben durch

$$\dot{N}_A(0)=-\frac{p}{2}(A_1+B_1)+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}(A_1-B_1),$$

$$\dot{N}_B(0) = -\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB}\frac{p}{2} - \frac{p^2}{2} + q\right)(A_1 + B_1) + \frac{1}{k_{BA}}(k_{AB} - p)\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,(A_1 - B_1),$$

$$\dot{N}_C(0) = \frac{1}{k_{BA}}\left((k_{BA} + k_{AB})\frac{p}{2} - \frac{p^2}{2} + q\right)(A_1 + B_1) - \frac{1}{k_{BA}}(k_{BA} + k_{AB} - p)\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,(A_1 - B_1).$$

Mit den Gleichungen für $N_C(0)$ und $\dot{N}_C(0)$ sowie der Relation $N_C(0) + N_A(0) = -N_B(0)$ folgt das inhomogene Gleichungssystem

$$\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)A_1 + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)B_1 = k_{BA}N_B(0) - k_{AB}N_A(0),$$

$$\left[\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}}\right]A_1 + \left[\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}}\right]B_1$$
$$= k_{BC}N_B(0) - k_{CB}N_C(0).$$

Dieses läßt ich in Vektornotation schreiben als

$$\begin{pmatrix} -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}} & \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} k_{BA}N_B(0) - k_{AB}N_A(0) \\ k_{BC}N_B(0) - k_{CB}N_C(0) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante des homogenen Systems

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} & -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}} & \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}} \end{vmatrix}$$

läßt sich wie folgt entwickeln:

$$D = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} + \frac{q}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$
$$-\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\frac{k_{BC} + k_{CB}}{k_{BA}} - \frac{q}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right).$$

Daraus folgt

$$D = \frac{2q}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} > 0.$$

Die Determinanten des inhomogenen Systems sind wiederum gegeben durch

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_{BA}N_B(0)-k_{AB}N_A(0) & -\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \\ k_{BC}N_B(0)-k_{CB}N_C(0) & \left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\frac{k_{BC}+k_{CB}}{k_{BA}}+\frac{q}{k_{BA}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{k_{BA}k_{CB}N_B(0)-k_{AB}(k_{BC}+k_{CB})N_A(0)+k_{BA}k_{CB}N_C(0)}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

$$+\frac{q\left(k_{BA}N_B(0)-k_{AB}N_A(0)\right)}{k_{BA}},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} & k_{BA}N_B(0)-k_{AB}N_A(0) \\ \left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\frac{k_{BC}+k_{CB}}{k_{BA}}+\frac{q}{k_{BA}} & k_{BC}N_B(0)-k_{CB}N_C(0) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{k_{BA}k_{CB}N_B(0)-k_{AB}(k_{BC}+k_{CB})N_A(0)+k_{BA}k_{CB}N_C(0)}{k_{BA}}\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

$$-\frac{q\left(k_{BA}N_B(0)-k_{AB}N_A(0)\right)}{k_{BA}}.$$

Mit den Abkürzungen

$$\gamma \equiv k_{BA}k_{CB}N_B(0)-k_{AB}(k_{BC}+k_{CB})N_A(0)+k_{BA}k_{CB}N_C(0),$$
$$\delta \equiv k_{BA}N_B(0)-k_{AB}N_A(0)$$

läßt sich die Übersichtlichkeit der Lösungen erhöhen:

$$A_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\gamma}{2q\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\frac{\delta}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}},$$

$$B_1 = \frac{D_2}{D} = -\frac{\gamma}{2q\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)-\frac{\delta}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Führen wir zur weiteren Vereinfachung noch die Abkürzungen

$$\alpha=\frac{\gamma}{2q\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}},\quad \beta=\frac{\delta}{2\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}$$

ein, so folgt

$$A_1=\alpha\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\beta,\quad B_1=-\alpha\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)-\beta.$$

Für Summe und Differenz der Eigenvektoren gilt ferner

$$A_1+B_1=-2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\quad\text{bzw.}\quad A_1-B_1=-\alpha\,p+2\beta.$$

Setzen wir die so erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen ein, ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned}N_A(t)&=N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+e^{-\frac{p}{2}t}\\&\times\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-\left(-\alpha\frac{p}{2}+\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_B(t)&=\frac{k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)\right.\\&\left.\times e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-\left(-\alpha\frac{p}{2}+\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right]+\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\\&\times\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+\left(-\alpha\frac{p}{2}+\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_C(t)&=-\frac{k_{BA}+k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)-\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA}+k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}\\&\times\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-\left(-\alpha\frac{p}{2}+\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right]-\frac{1}{k_{BA}}\\&\times\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+\left(-\alpha\frac{p}{2}+\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+\beta\right)e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right].\end{aligned}$$

Nach Vorzeichen separiert folgt

$$N_A(t)=N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}+e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}+\beta\right)\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right.$$
$$\left.-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right],$$

$$N_B(t)=\frac{k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)+\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}+\beta\right)\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}+\beta\right)\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right.$$
$$\left.-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right],$$

$$N_C(t)=-\frac{k_{BA}+k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0)+2\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)-\frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA}+k_{AB}-\frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}+\beta\right)\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{k_{BA}}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(-\alpha\frac{p}{2}+\beta\right)\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}+e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right.$$
$$\left.-\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\left(e^{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}-e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t}\right)\right].$$

Durch Substitution der gemischten Terme

$$\alpha\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\frac{1}{2}\frac{\gamma}{q}\quad\text{bzw.}\quad -\alpha\frac{p}{2}+\beta=\frac{1}{2}\left(\delta-\frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{p^2/4-q}}$$

lassen sich die Größen α und β wieder eliminieren. Das führt schließlich zu der endgültigen Gestalt der Lösungen

$$N_A(t)=N_A(0)+\frac{\gamma}{q}+e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(\delta-\frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\sinh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t-\frac{\gamma}{q}\cosh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t\right],$$

$$N_B(t) = \frac{k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0) + \frac{\gamma}{q}\right) + \frac{1}{k_{BA}}\left(k_{AB} - \frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left[\left(\delta - \frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\sinh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t - \frac{\gamma}{q}\cosh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t\right]$$
$$+\frac{1}{k_{BA}}e^{-\frac{p}{2}t}\left(\left(\delta - \frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\cosh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t - \frac{\gamma}{q}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\sinh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t\right),$$

$$N_C(t) = -\frac{k_{BA}+k_{AB}}{k_{BA}}\left(N_A(0) + \frac{\gamma}{q}\right) - \frac{1}{k_{BA}}\left(k_{BA} + k_{AB} - \frac{p}{2}\right)e^{-\frac{p}{2}t}$$
$$\times\left[\left(\delta - \frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}\sinh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t - \frac{\gamma}{q}\cosh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t\right]$$
$$-\frac{1}{k_{BA}}e^{-\frac{p}{2}t}\left[\left(\delta - \frac{\gamma}{q}\frac{p}{2}\right)\cosh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t - \frac{\gamma}{q}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\sinh\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}t\right].$$

Im Falle, daß die Diskriminante

$$D = q - \frac{p^2}{4} = \frac{4k_{AB}k_{CB} + 4k_{AB}k_{BC} + 4k_{CB}k_{BA} - \left(k_{AB} + k_{BA} + k_{BC} + k_{CB}\right)^2}{4}$$
$$= -\frac{\left(k_{AB} + k_{BA}\right)^2 + 2k_{BA}\left(k_{BC} - k_{CB}\right) + \left(k_{BC} - k_{AB} + k_{CB} - k_{AB}\right)\left(k_{BC} + k_{CB}\right)}{4}$$

negativ ist, was für $k_{AB} < k_{CB} < k_{BC}$ stets der Fall ist, ergeben sich hyperbolische Lösungen. Die Rate k_{AB} derer, denen es gelingt, aus der Armut in den Mittelstand aufzusteigen, ist sicher kleiner als die Rate k_{CB} derer, die vom Reichtum in den Mittelstand zurückfallen. Ebenso ist die Rate k_{CB} derer, die vom Reichtum in den Mittelstand zurückfallen, kleiner als die Rate k_{BC} derer, die vom Mittelstand in den Reichtum aufsteigen.

Abb. 2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Armen und Reichen sowie des Mittelstands unter der Annahme, daß es zu Beginn der Entwicklung ausschließlich einen Mittelstand gab. Man erkennt, daß es unter solchen Verhältnissen sehr schnell zu einem erheblichen Anstieg der Armen kommt (etwa 70 %), während sich die Zahl der Reichen gerade noch in Grenzen hält (ungefähr 20 %). Daran ändert sich auch kaum etwas, wenn es zu Beginn der Entwicklung jeweils 10 % Arme und Reiche gab (siehe Abb. 3).

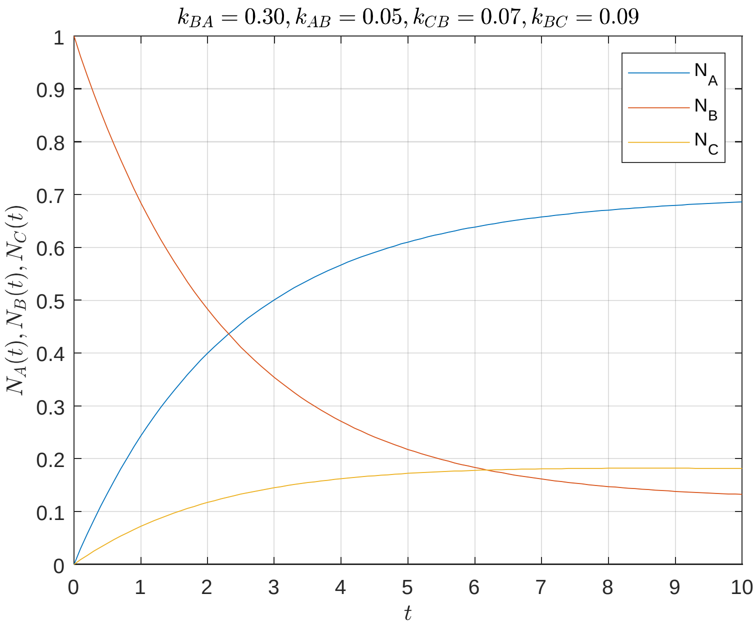

Abbildung 2. Zeitliche Entwicklung der Armen und Reichen und des Mittelstands unter der Annahme, daß es zu Beginn der Entwicklung ausschließlich einen Mittelstand gab

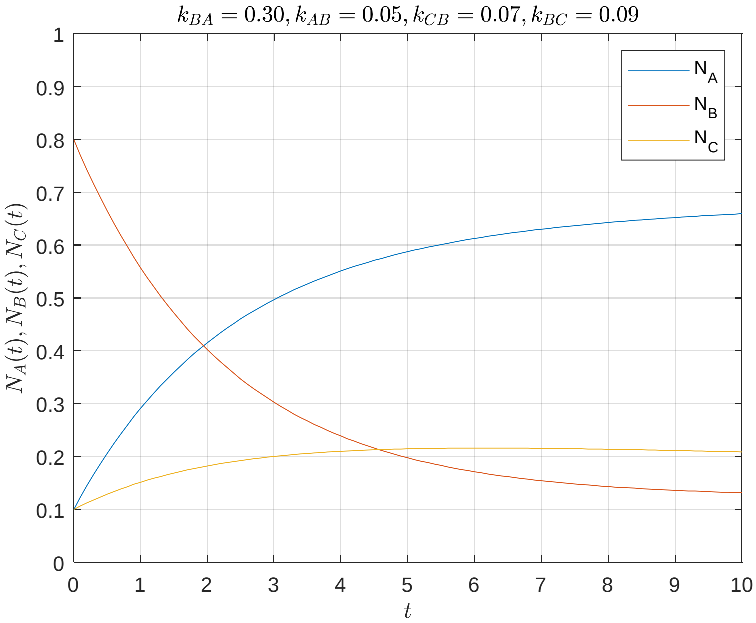

Abbildung 3. Zeitliche Entwicklung der Armen und Reichen und des Mittelstands unter der Annahme, daß es zu Beginn der Entwicklung jeweils 10 % Arme und Reiche gab

Erst wenn die Raten k_{AB} und k_{BC} signifikant (hier um jeweils 10 %) erhöht werden, nimmt die Zahl der Armen um 20 % auf etwa 50 % ab (Abb. 4). Bei den Reichen hat sich bezüglich der Differenz $k_{BC} - k_{CB} = 0{,}02$ nichts geändert. Die Schere zwischen Arm und Reich ist deutlich kleiner geworden. Das Ergebnis ist als solches aber immer noch unbefriedigend, da der Mittelstand immer noch zu schlecht wegkommt. Das ändert sich erst, wenn man die Rate k_{BA} derer, die vom Mittelstand ins Lager der Armen abrutschen, deutlich absenkt. Das ist schließlich in Abb. 5 zu sehen. Die Rate k_{BA} wurde von 0,30 auf 0,05 erniedrigt. Jetzt liegt die Zahl der

Armen nur knapp über 10 %, was tolerabel ist. Dem Mittelstand geht es mit einem Anteil von 40 % wieder gut, und Reiche gibt es sogar noch etwas mehr.

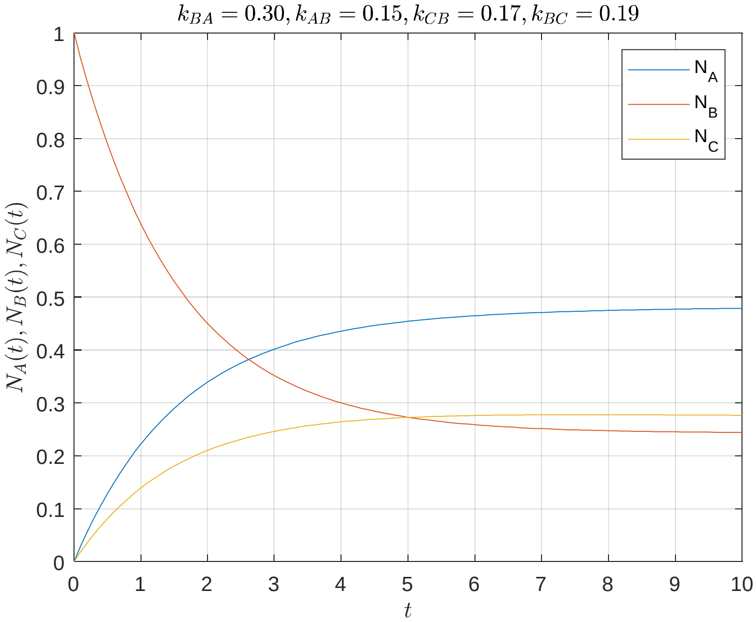

Abbildung 4. Zeitliche Entwicklung der Armen und Reichen und des Mittelstands unter der Annahme, daß Arme und Mittelstand besonders gefördert werden

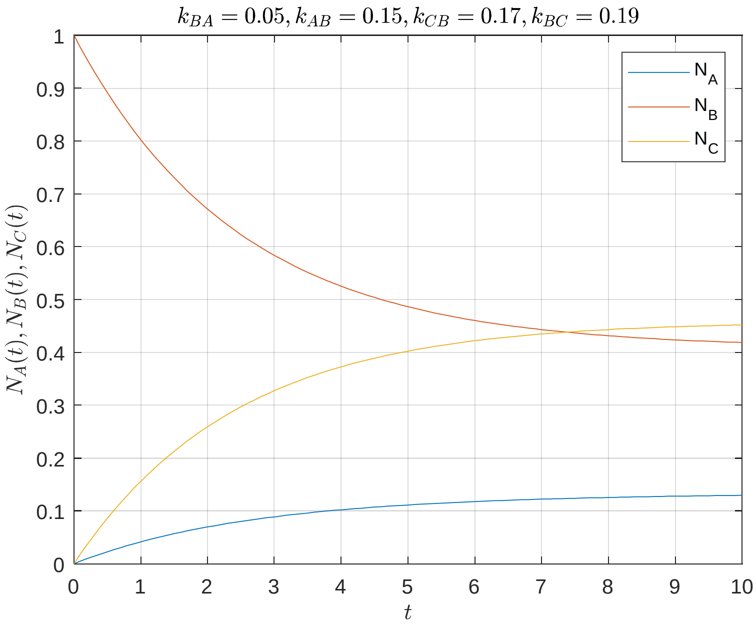

Abbildung 5. Zeitliche Entwicklung der Armen und Reichen und des Mittelstands unter der Annahme, daß der Mittelstand noch stärker gefördert wird

Eingriffe der Politik erfordern also eine Anhebung der Rate k_{AB}, um die Armen wieder in Brot und Arbeit zu bringen, ggf. durch Zumutung einer Arbeit. Durch Anhebung der Rate k_{BC} muß der Mittelstand gefördert werden, denn er ist die tragende Säule der Gesellschaft. Hingegen kann durch Anhebung der Rate k_{CB} die Förderung der Reichen ausbleiben, ggf. sind Abschreibungsmöglichkeiten zu streichen. Alle diese Maßnahmen bewirken weniger Arme, mehr Reiche und einen deutlich angehobenen Mittelstand. Mithin nimmt der Gini- oder Ungleichheitskoeffizient[1] dadurch ab und es entsteht eine gerechtere Welt.[2]

[1] Aufgabe [157]

[2] Unter der Annahme, daß Gleichheit ungerecht ist

Anhang

```
% Wirtschaftsmathematik

N_0 = 1;
N_A_0 = 0.18;
N_B_0 = 0.64;
N_C_0 = -N_B_0 - N_A_0 + N_0;

k_BA = 0.30;
k_AB = 0.05;
k_CB = 0.07;
k_BC = 0.09;

p = k_AB + k_BA + k_BC + k_CB;
q = k_AB*k_CB + k_AB*k_BC + k_CB*k_BA;
D = q - p^2/4
w = sqrt(p^2/4 - q);
gamma = k_BA*k_CB*N_B_0 - k_AB*(k_BC + k_CB)*N_A_0 + k_BA*k_CB*N_C_0;
delta = k_BA*N_B_0 - k_AB*N_A_0;

% Graphikvariablen
a = 0;
b = 20;
n = 101;

% Funktionsberechnung
for i = 1:n
    t(i) = a + (i-1)*(b - a)/(n-1);
    sh(i) = sinh(w*t(i))/w;
    ch(i) = cosh(w*t(i));
    N_A(i) = N_A_0 + gamma/q + exp(-p/2*t(i))*((delta - p/2*gamma/q)*sh(i)-
gamma/q*ch(i));
    N_B(i) = k_AB/k_BA*(N_A_0 + gamma/q) + (k_AB - p/2)/k_BA*exp(-
p/2*t(i))*((delta - p/2*gamma/q)*sh(i)- gamma/q*ch(i)) + 1/k_BA*exp(-
p/2*t(i))*((delta - p/2*gamma/q)*ch(i)- gamma/q*w^2*sh(i));
    N_C(i) = N_0 -(k_BA + k_AB)/k_BA*(N_A_0 + gamma/q) - (k_BA + k_AB -
p/2)/k_BA*exp(-p/2*t(i))*((delta - p/2*gamma/q)*sh(i)- gamma/q*ch(i)) -
1/k_BA*exp(-p/2*t(i))*((delta - p/2*gamma/q)*ch(i)- gamma/q*w^2*sh(i));
    N0(i) = N_A(i) + N_B(i) + N_C(i);
end

% Graphische Darstellung
figure(1)
plot(t,N_A)
hold on
plot(t,N_B)
hold on
plot(t,N_C)
legend('N_A','N_B','N_C');
grid on
ylim([0 1])
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$N_A(t), N_B(t), N_C(t)$','interpreter','latex')
title('$k_{BA}=0.30, k_{AB} = 0.05, k_{CB} = 0.07, k_{BC} = 0.09$','inter-
preter','latex')
```

