

Mathematikaufgabe 158

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Ein Mann behauptet felsenfest, daß durch die Zerkleinerung von Styroporplatten mehr Platz in der Mülltonne entstehe. Beweisen Sie das Gegenteil.

Beweis: Wenn Styroporplatten zerkleinert werden, entstehen unregelmäßige Bruchstellen mit kugelhähnlichen Oberflächen. Wir nehmen nun an, daß jede dieser Kugeln einem Quader gleicher Masse entspricht,¹ und daß die Quader zu einer Platte gepreßt keine Zwischenräume enthalten. Zerlegen wir das Styropor gedanklich in lauter gleiche Kugeln und ordnen diese Kugeln in hexagonal-dichtester Kugelpackung an (siehe Abb. 1), nehmen diese Schichten ein größeres Volumen ein als die entsprechenden Platten.

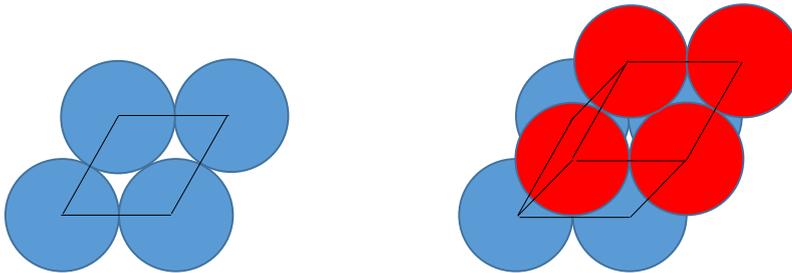


Abbildung 1. Elementarzelle der hexagonal-dichtesten Kugelpackung

Der Beweis geht wie folgt: In der linken Abbildung ist die untere (blaue) Kugellage gezeichnet, deren Mittelpunkte die Form einer Raute bilden. Darüber wird die obere (rote) Kugelschicht so angeordnet, daß der Kugelmittelpunkt genau über dem Zwischenraum dreier angrenzender Kugeln liegt. Die Elementarzelle ist also ein Parallelepiped, dessen Volumen sich mit den Vektoren

$$\vec{a} = 2R\vec{e}_x, \quad \vec{b} = 2R\left(\cos\frac{\pi}{3}\vec{e}_x + \sin\frac{\pi}{3}\vec{e}_y\right), \quad \vec{c} = 2R\cos\frac{\pi}{6}\vec{e}_z$$

gemäß der Formel $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ berechnet. Dabei ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = 4R^2 \sin\frac{\pi}{3}\vec{e}_x \times \vec{e}_y = 2\sqrt{3}R^2\vec{e}_z$$

und

$$V = 2\sqrt{3}R^2\vec{e}_z \cdot \sqrt{3}R\vec{e}_z = 6R^3.$$

Setzen wir aufgrund der Massengleichheit das Kugelvolumen mit dem Quadervolumen der Länge a gleich,² d.h.

$$\frac{4\pi}{3}R^3 = a^3,$$

¹ Nach dem Satz von der Erhaltung der Masse, da die Dichte konstant bleibt

² Entspricht in zwei Dimensionen der Quadratur des Kreises

Mathematikaufgabe 158

so ist

$$V = 6R^3 = 6 \frac{3}{4\pi} a^3 = \frac{9}{2\pi} a^3 \approx \frac{3}{2} a^3.$$

Das in seine Bestandteile zerlegte Styropor beansprucht also in der Mülltonne eineinhalbmal soviel Platz wie das plattenförmige Styropor,

qed