Aufgabe: Bestimmen Sie die Häufigkeit von Ereignissen anhand von Platonischen Körpern.

Lösung: Er gibt insgesamt 5 Platonische Körper, die man als mehreckige Würfel verwenden kann. Sie sind unter Angabe der Eulerschen Polyederformel in folgender Übersicht zusammengefaßt. Dabei ist E die Zahl der Ecken, F die Zahl der Flächen und K die Zahl der Kanten.

Polyeder	E	F	K	$E+F-K=2$
Tetraeder	4	4	6	$4+4-6=2$
Hexaeder	8	6	12	$8+6-12=2$
Oktaeder	6	8	12	$6+8-12=2$
Dodekaeder	20	12	30	$20+12-30=2$
Ikosaeder	12	20	30	$12+20-30=2$

In Abb. 1 ist ein Ikosaeder-Würfel mit 20 Flächen dargestellt, der nach einem Wurf auf einer Fläche liegenbleibt. Jeder Fläche ist ein Ereignis zugeordnet, und die Flächen selbst haben gleiche Wahrscheinlichkeit.

Ein Ereignis tritt ein, wenn gewürfelt wird. Wir unterteilen die Ereignisse grob in drei Klassen:

Klasse 1	geringe Häufigkeit	$[-3\sigma,-2\sigma],[2\sigma,3\sigma]$
Klasse 2	mittlere Häufigkeit	$[-2\sigma,-\sigma],[\sigma,2\sigma]$
Klasse 3	große Häufigkeit	$[-\sigma,\sigma]$

Dabei wählen wir in unserer Klassifizierung die mittlere Häufigkeit doppelt so groß wie die niedrige und die große dreimal so groß wie die geringe Häufigkeit.

Ereignis	Klasse	Fläche	Wahrscheinlichkeit
1	1	1	$1/12$
2	2	2, 8	$2\times1/12=1/6$
3	2	3, 9	$2\times1/12=1/6$
4	1	4	$1/12$
5	1	5	$1/12$
6	3	6, 10, 11	$3\times1/12=1/4$
7	2	7, 12	$2\times1/12=1/6$
Summe	12		1

Tabelle 1. Sieben Ereignisse lassen sich gut auf einen Dodekaeder mit 12 Flächen abbilden

Wir ordnen nun jedem Ereignis eine Häufigkeitsklasse zu und bilden davon die Quersumme. Für die Klasse 1 reicht eine Würfelfläche aus, auf die wir die Nummer des Ereignisses schreiben. Bei Klasse 2 müssen wir das dazugehörige Ereignis noch auf eine weitere Würfelfläche schreiben, bei Klasse 3 entsprechend noch auf eine dritte. Das Ereignis 2 ist demnach auch auf die Fläche 8 zu schreiben, das Ereignis 3 auf die Fläche 9, das Ereignis 6 auf die Fläche 10; und weil es in Klasse 3 gehört, auch noch auf die Fläche 11. Das Ereignis 7 schreiben wir ein zweites

Mal auf die letzte Fläche 12. Die σ -Werte nehmen vergleichsweisen Bezug auf eine Gaußverteilung, die wir hier natürlich nicht vorliegen haben, weil wir nur vage Annahmen getroffen haben.

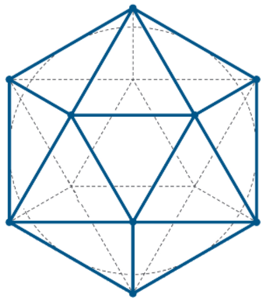

Abbildung 1. Der Ikosaeder ist derjenige Platonische Körper mit den meisten Flächen

Wir können uns auch eine feinere Klassifizierung in insgesamt 5 Klassen vorstellen, wie sie beispielhaft in der folgenden Übersicht dargestellt ist:

Klasse 1	sehr geringe Häufigkeit	$[-3\sigma,-2\sigma],[2\sigma,3\sigma]$
Klasse 2	geringe Häufigkeit	$[-2\sigma,-3\sigma/2],[3\sigma/2,2\sigma]$
Klasse 3	mittlere Häufigkeit	$[-3\sigma/2,-\sigma],[\sigma,3\sigma/2]$
Klasse 4	große Häufigkeit	$[-\sigma,-\sigma/2],[\sigma/2,\sigma]$
Klasse 5	sehr große Häufigkeit	$[-\sigma/2,+\sigma/2]$

Für die Ereignisse 4 und 7 reicht je eine Würfelfläche aus, auf die wir die Nummer des jeweiligen Ereignisses schreiben. Bei Ereignis 5 müssen wir das dazugehörige Ereignis noch auf die Würfelfläche 18 schreiben, bei Ereignis 6 noch einmal auf zwei weitere (19, 20). Das Ereignis 2 ist demnach auch auf die Flächen 12, 13 und 14 zu schreiben, das Ereignis 3 auf die Flächen 15, 16 und 17. Das Ereignis 1 schließlich schreiben wir auf 4 weitere Flächen, und zwar auf die Flächen 8-11. Nun sind die Wahrscheinlichkeiten lediglich noch zu addieren.

Ereignis	Klasse	Fläche	Wahrscheinlichkeit
1	5	1, 8, 9, 10, 11	$5\times1/20=1/4$
2	4	2, 12, 13, 14	$4\times1/20=1/5$
3	4	3, 15, 16, 17	$4\times1/20=1/5$
4	1	4	$1/20$
5	2	5, 18	$2\times1/20=1/10$
6	3	6, 19, 20	$3\times1/20=3/20$
7	1	7	$1/20$
Summe	20		1

Tabelle 2. Sieben Ereignisse lassen sich bei entsprechender Klassifizierung auf einen Ikosaeder mit 20 Flächen abbilden

Was geschieht, wenn die Summe der Klassen auf keinem Platonischen Körper unterzubringen ist? Nun, solange die Abweichung nur ±1 ist, können wir uns überlegen, das zweifelhafteste Ereignis um eine Klasse höher oder niedriger zu bewerten. Ansonsten verbleibt uns nur die

Möglichkeit, auf einen anderen Polyeder zuzugreifen, der aber nur in der Vorstellung eine kongruente Zahl von Flächen besitzt. Die Wirklichkeit ist für den Gang der Berechnung allerdings nicht maßgeblich.

