Aufgabe: Begründen Sie, warum ein unbemanntes Kampfflugzeug einem bemannten immer überlegen sein wird.

Lösung: Das nachfolgend beschriebene Verfahren setzt lediglich eine Peilung der gegnerischen Munition voraus. Wir wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit und aus Gründen der Einfachheit ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem bzw. ein Polarkoordinatensystem. Um die in den folgenden Abbildungen dargestellte Ausgangssituation herzustellen, geht man wie folgt vor. Bei stehender Peilung, bei der ein gegnerischer Treffer zustande käme, verändert der Pilot oder Autopilot seine Flugrichtung derart zum Gegner hin, daß die Peilung auswandert. Der gegnerische Flugkörper bemerkt das und verändert seinerseits seine Flugrichtung so, daß die Peilung wieder zum Stehen kommt. Nun ist wieder das angegriffene Flugzeug an der Reihe. Dieses wechselseitige Spiel treibt man so lange, bis die Peilung 90° querab zur Flugrichtung steht. Sei $\mathbf{v}_1$ die Geschwindigkeit des Flugkörpers und $\mathbf{v}_2$ die Geschwindigkeit des Kampfflugzeugs. Dann gilt $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ bzw.

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die Lösungen

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos\varphi_1, \quad & y_1 &= r_1 \sin\varphi_1, \\ x_2 &= r_2 \cos\varphi_2, \quad & x_2 &= r_2 \sin\varphi_2 \end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{r}_1 \cos\varphi_1 - r_1\dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1, \quad & \dot{y}_1 &= \dot{r}_1 \sin\varphi_1 + r_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= \dot{r}_2 \cos\varphi_2 - r_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2, \quad & \dot{y}_2 &= \dot{r}_2 \sin\varphi_2 + r_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2. \end{aligned}$$

Setzen wir letztere in die obige Differentialgleichung ein, erhalten wir die Relation

$$\begin{aligned} \left(\dot{r}_1 \cos\varphi_1 - \dot{\varphi}_1 r_1 \sin\varphi_1\right)\left(\dot{r}_2 \cos\varphi_2 - r_2\dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2\right) + \left(\dot{r}_1 \sin\varphi_1 + r_1\dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1\right) \\ \times\left(\dot{r}_2 \sin\varphi_2 + r_2\dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2\right) = 0, \end{aligned}$$

die wir umformen können zu

$$\left(\dot{r}_1\dot{r}_2 + r_1\dot{\varphi}_1 r_2\dot{\varphi}_2\right)\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + \left(\dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2 - \dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1\right)\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0.$$

Diesen Ausdruck können wir nach dem Differenzwinkel auflösen, d.h.

$$\tan\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = \frac{\dot{r}_1\dot{r}_2 + r_1\dot{\varphi}_1 r_2\dot{\varphi}_2}{\dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1 - \dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2}.$$

Quadrieren dieses Ausdrucks führt zu

$$\left(\dot{r}_1\dot{r}_2 + r_1\dot{\varphi}_1 r_2\dot{\varphi}_2\right)^2 - \tan^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\left(\dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1 - \dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2\right)^2 = 0$$

und schließlich zur Relation

$$\dot{r}_1^2\left(\dot{r}_2^2 - r_2^2\dot{\varphi}_2^2\tan^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right) + 2\dot{r}_1\dot{r}_2 r_1 r_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\left(1+\tan^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$$
$$+r_1^2\dot{\varphi}_1^2\left(r_2^2\dot{\varphi}_2^2 - \dot{r}_2^2\tan^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right) = 0.$$

Mit Hilfe der Bahngeschwindigkeiten

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2\varphi_1^2,\quad v_2^2 = \dot{r}_2^2 + r_2^2\varphi_2^2$$

und entsprechender Substitution können wir weiter umformen,

$$\dot{r}_1^2\left(v_2^2 - \frac{r_2^2\dot{\varphi}_2^2}{\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\right) + \frac{2\dot{r}_1\dot{r}_2 r_1 r_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2}{\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)} + r_1^2\dot{\varphi}_1^2\left(v_2^2 - \frac{\dot{r}_2^2}{\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\right) = 0.$$

Nach erneuter Vertauschung von Gliedern ergibt sich der einfachere Ausdruck

$$\left(\dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}_1^2\right)v_2^2 - \frac{1}{\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\left(\dot{r}_1^2 r_2^2\dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{r}_1\dot{r}_2 r_1 r_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + r_1^2\dot{\varphi}_1^2\dot{r}_2^2\right) = 0,$$

der nach Substitution der Bahngeschwindigkeit die Beziehung

$$v_1^2 v_2^2 - \frac{1}{\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right)}\left(\dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2 - \dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1\right)^2 = 0$$

ergibt. Daraus erhalten wir das neuronale Netzwerk

$$v_1^2 v_2^2\cos^2\left(\varphi_1-\varphi_2\right) = \left(\dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2 - \dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1\right)^2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0,$$

das gleichbedeutend ist mit der Minimierung der Funktion

$$\left(\dot{r}_1 r_2\dot{\varphi}_2 - \dot{r}_2 r_1\dot{\varphi}_1\right)^2 = 0.$$

Alles läuft auf eine Minimierung nach dem Kosinussatzes hinaus:

$$\Delta r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right).$$

Dabei gelten die Anfangsbedingungen

$$\dot{r}_1(0) = v_1,\quad r_2(0) = \Delta r_0,\quad r_2(0)\dot{\varphi}_2(0) = v_2,$$
$$\dot{r}_2(0) = 0,\quad r_1(0) = 0,\quad r_1(0)\dot{\varphi}_1(0) = 0.$$

Allgemein folgen mit der Parametrisierung $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ und den Winkeln

$$\Delta\varphi_i = \arctan\frac{y_2^{(i)}\left(t_i\right) - y_1^{(i)}\left(t_i\right)}{x_2^{(i)}\left(t_i\right) - x_1^{(i)}\left(t_i\right)}$$

die Netzwerkgleichungen

$$\begin{aligned} x_1^{(i+1)}\left(t_{i+1}\right) &= x_1^{(i)}\left(t_i\right)+v_1\cos\Delta\varphi_i\cdot\Delta t, \quad y_1^{(i+1)}\left(t_{i+1}\right)=y_1^{(i)}\left(t_i\right)+v_1\sin\Delta\varphi_i\cdot\Delta t,\\ x_2^{(i+1)}\left(t_{i+1}\right) &= x_2^{(i)}\left(t_i\right)-v_2\sin\Delta\varphi_i\cdot\Delta t, \quad y_2^{(i+1)}\left(t_{i+1}\right)=y_2^{(i)}\left(t_i\right)+v_2\cos\Delta\varphi_i\cdot\Delta t. \end{aligned}$$

Wir wählen als Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1^{(0)}\left(t_0\right) &= 0, \qquad y_1^{(0)}\left(t_0\right)=0,\\ x_2^{(0)}\left(t_0\right) &= \Delta r_0, \quad y_2^{(0)}\left(t_0\right)=0 \end{aligned}$$

mit der Anfangssteigung

$$\Delta\varphi_0=\arctan\frac{y_2^{(0)}\left(t_0\right)-y_1^{(0)}\left(t_0\right)}{x_2^{(0)}\left(t_0\right)-x_1^{(0)}\left(t_0\right)}=0.$$

Die nächste Iteration liefert die Werte

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}\left(t_1\right) &= x_1^{(0)}\left(t_0\right)+v_1\cos\Delta\varphi_0\cdot\Delta t, \quad y_1^{(1)}\left(t_1\right)=y_1^{(0)}\left(t_0\right)+v_1\sin\Delta\varphi_0\cdot\Delta t,\\ x_2^{(1)}\left(t_1\right) &= x_2^{(0)}\left(t_0\right)-v_2\sin\Delta\varphi_0\cdot\Delta t, \quad y_2^{(1)}\left(t_1\right)=y_2^{(0)}\left(t_0\right)+v_2\cos\Delta\varphi_0\cdot\Delta t, \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Werte der ersten Schicht folgt das Ergebnis

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}\left(t_1\right) &= v_1\Delta t, \quad y_1^{(1)}\left(t_1\right)=0,\\ x_2^{(2)}\left(t_1\right) &= \Delta r_0, \quad y_2^{(2)}\left(t_1\right)=v_2\Delta t. \end{aligned}$$

Mit dem Winkelwert

$$\Delta\varphi_1=\arctan\frac{y_2^{(1)}\left(t_1\right)-y_1^{(1)}\left(t_1\right)}{x_2^{(1)}\left(t_1\right)-x_1^{(1)}\left(t_1\right)}=\arctan\frac{v_2\Delta\,\mathrm{t}}{\Delta r_0-v_1\Delta\,\mathrm{t}}$$

können wir daraus das nächste Glied berechnen:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)}\left(t_2\right) &= x_1^{(1)}\left(t_1\right)+v_1\cos\Delta\varphi_1\cdot\Delta t, \quad y_1^{(2)}\left(t_2\right)=y_1^{(1)}\left(t_1\right)+v_1\sin\Delta\varphi_1\cdot\Delta t,\\ x_2^{(2)}\left(t_2\right) &= x_2^{(1)}\left(t_1\right)-v_2\sin\Delta\varphi_1\cdot\Delta t, \quad y_2^{(2)}\left(t_2\right)=y_2^{(1)}\left(t_1\right)+v_2\cos\Delta\varphi_1\cdot\Delta t \end{aligned}$$

und so fort. Aber das macht das rekurrente neuronale Netzwerk selbst,

$$\left(\Delta r_1\cdot r_2\Delta\varphi_2-\Delta r_2\cdot r_1\Delta\varphi_1\right)^2=0,$$

wobei wir die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt haben. Aus den Relationen

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi=\arctan\frac{y}{x},$$
$$\dot r=\frac{x\dot x+y\dot y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad r\dot\varphi=\frac{\dot y x-\dot x y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

folgt

$$\Delta r=\frac{x\Delta x+y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad r\Delta\varphi=\frac{x\Delta y-y\Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Die beiden Kontrahenten können wir also durch die Differenzenquotienten

$$\Delta r_1=\frac{x_1\Delta x_1+y_1\Delta y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}, \qquad r_1\Delta\varphi_1=\frac{x_1\Delta y_1-y_1\Delta x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}},$$
$$\Delta r_2=\frac{x_2\Delta x_2+y_2\Delta y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}, \quad r_2\Delta\varphi_2=\frac{x_2\Delta y_2-y_2\Delta x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

vollständig beschreiben. Setzen wir in die Minimierungsfunktion ein, d.h.

$$\left(\frac{x_1\Delta x_1+y_1\Delta y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\frac{x_2\Delta y_2-y_2\Delta x_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}-\frac{x_2\Delta x_2+y_2\Delta y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\frac{x_1\Delta y_1-y_1\Delta x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)^2=0,$$

was nach Kürzen des Nenners gleichbedeutend ist mit

$$\left(\left(x_1\Delta x_1+y_1\Delta y_1\right)\left(x_2\Delta y_2-y_2\Delta x_2\right)-\left(x_2\Delta x_2+y_2\Delta y_2\right)\left(x_1\Delta y_1-y_1\Delta x_1\right)\right)^2=0,$$

erhalten wir nach entsprechender Umformung den Ausdruck

$$\left(\left(x_1x_2+y_1y_2\right)\left(\Delta x_1\Delta y_2-\Delta y_1\Delta x_2\right)-\left(x_1y_2-x_2y_1\right)\left(\Delta x_1\Delta x_2+\Delta y_1\Delta y_2\right)\right)^2=0,$$

in den wir die Differenzen

$$\Delta x_1=v_1\cos\Delta\varphi_i\Delta t, \qquad \Delta y_1=v_1\sin\Delta\varphi_i\Delta t,$$
$$\Delta x_2=-v_2\sin\Delta\varphi_i\Delta t, \quad \Delta y_2=v_2\cos\Delta\varphi_i\Delta t$$

einsetzen. Das Ergebnis lautet

$$\left(\left(x_1x_2+y_1y_2\right)v_1v_2\Delta t^2-\left(x_1y_2-x_2y_1\right)v_1v_2\Delta t^2\left(-\sin\Delta\varphi_i\cos\Delta\varphi_i+\sin\Delta\varphi_i\cos\Delta\varphi_i\right)\right)^2=0,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2=0.$$

Mit den Gleichungen

$$x_1 = r_1 \cos\varphi_1, \quad y_1 = r_1 \sin\varphi_1,$$
$$x_2 = r_2 \cos\varphi_2, \quad x_2 = r_2 \sin\varphi_2$$

folgt

$$r_1^2 r_2^2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right)^2 = 0$$

und nach Anwendung des Additionstheorems

$$\cos^2\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Das heißt im Klartext: Die beiden Geschwindigkeitsvektoren müssen aufeinander senkrecht stehen, damit das Skalarprodukt verschwinden kann. Die Arbeitsweise des Netzwerks können wir in anschaulich verständlicher Weise Abb. 1 entnehmen. Die Peilungen erfolgen dabei zwischen zwei gleichen Indizes der beiden Bahnkurven. Eine Flugbahnregelung findet bei autonomen Systemen ohnehin statt.

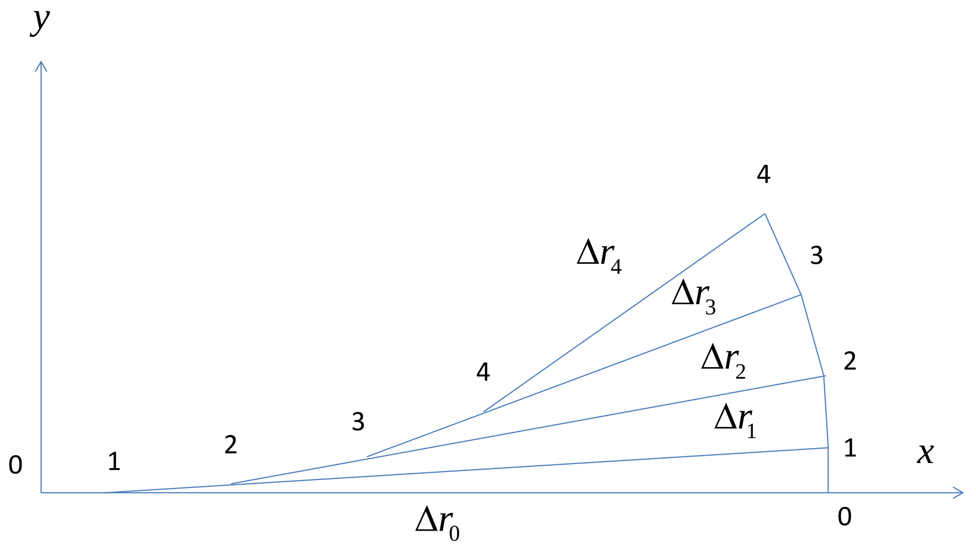

Abbildung 1. Iterationsschritte des neuronalen Netzwerks

In Abbildung 2 fliegt die Munition doppelt so schnell wie der ausweichende bemannte Fighter. Die Einleitung des Manövers erfolgt bei zwei unterschiedlichen Abständen. In beiden Fällen wird das Flugzeug abgeschossen, sofern keine Gegenmaßnahmen ergriffen werden und die Querbeschleunigung grundsätzlich aufgebracht werden kann. Dabei zeigt sich, daß die Querbeschleunigungsfähigkeit um so größer sein muß, je später das Ausweichmanöver eingeleitet wird.

Bei eineinhalbfachem Geschwindigkeitsunterschied (Abb. 3) ist gerade jener Grenzfall erreicht, bei dem der Angreifer das Flugzeug gerade nicht mehr erreicht, aber die Annäherung wird dennoch bedrohlich.

In Abbildung 4 haben Munition und Flugzeug die gleiche Geschwindigkeit. Ein solches Flugzeug kann in der Regel nur unbemannt sein. Beide Luftfahrzeuge kommen sich im zweiten

Quadranten nicht mehr besonders nahe, und im dritten Quadraten dürfte die Querbeschleunigungsfähigkeit aller Wahrscheinlichkeit nach nicht mehr ausreichen, um eine weitere Annäherung zu gestatten, da die geflogenen Kurvenradien allmählich zu klein werden.

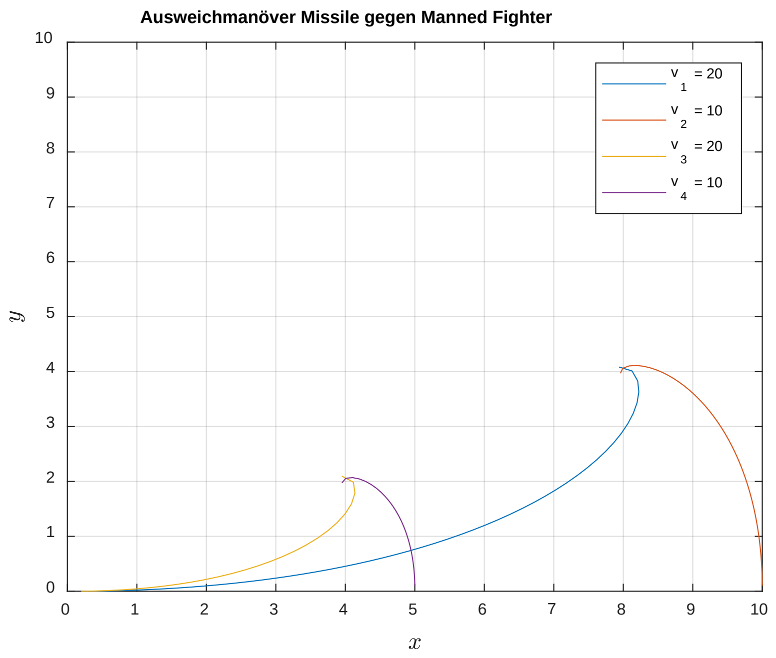

Abbildung 2. Angreifender Flugkörper fliegt doppelt so schnell wie bemannter Fighter

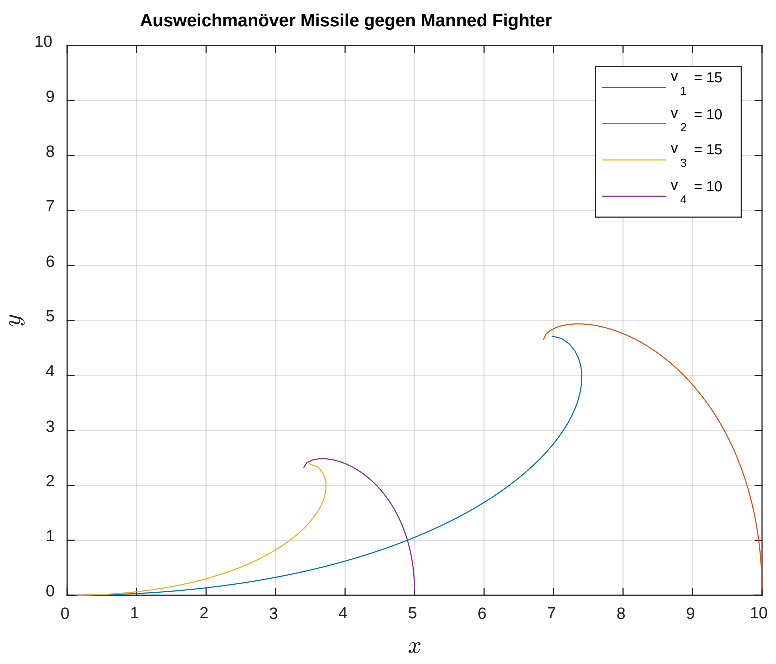

Abbildung 3. Angreifender Flugkörper fliegt eineinhalbmal so schnell wie bemannter Fighter

Das gleiche gilt im Prinzip, wenn der Lenkflugkörper langsamer fliegt als das angegriffene Flugzeug (Abb. 5), was bei bemannten Flugzeugen kaum der Fall sein dürfte.

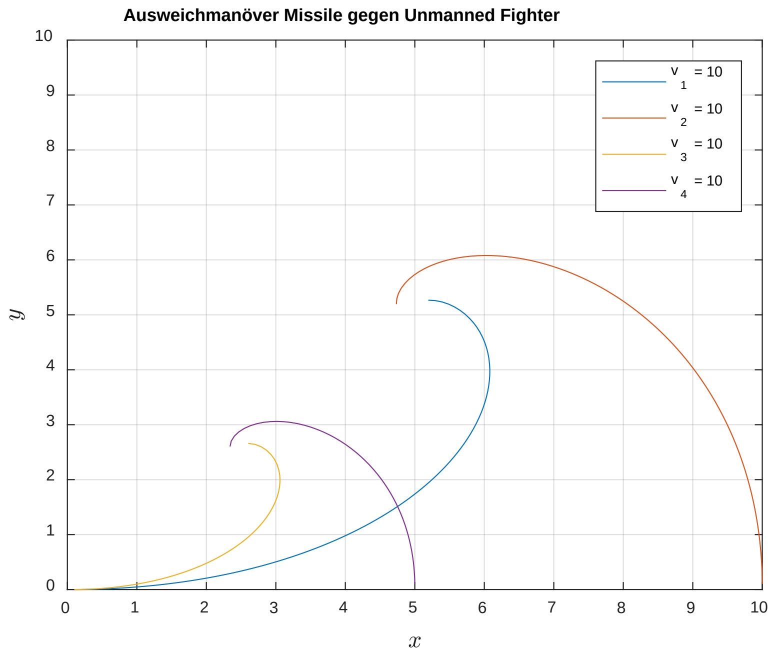

Abbildung 4. Angreifender Flugkörper fliegt genauso so schnell wie unbemannter Fighter

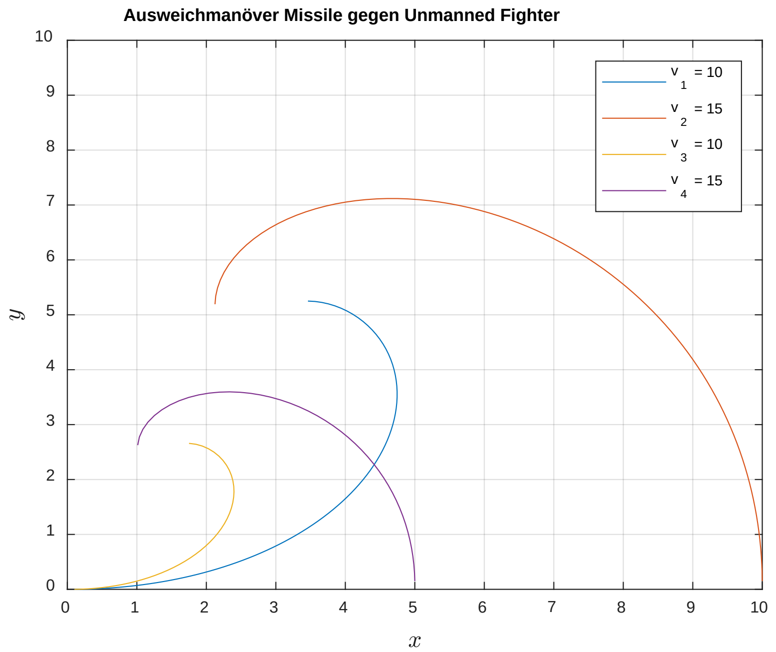

Abbildung 5. Unbemannter Fighter fliegt eineinhalbmal so schnell wie angreifender Flugkörper

Was das Fliegen von Ausweichmanövern angeht, geht also der Trend eindeutig hin zum unbemannten Kampfflugzeug, da der Pilot extreme Querbeschleunigungen von mehr als 9 g auch kurzeitig nicht aushält. Um die erforderlichen hohen Geschwindigkeiten zu erreichen, sind Raketenantriebe besser geeignet als Strahltriebwerke.

Die in einem Suchkopf integrierte künstliche Intelligenz sollte nach entsprechendem Training in der Lage sein, die Position des angegriffenen Flugzeugs anhand von nichtüberwachtem Lernen vorauszuberechnen, auch wenn dieses sich hinter einer Wolke von künstlichen Nebeln oder Störern verbirgt. Sie greift dazu auf Informationen zurück, wie ein durchschnittlicher Pilot sich verhalten würde, der sich durch Defensive Aids-Maßnahmen zu einem Ausweichmanöver entschließt.

Anhang

```
% Program Evasive Manoeuvres
clear all
n = 100;
Delta_t = 1/n;

% Anfangswerte
x10 = 0;
y10 = 0;
x20 = 10;
y20 = 0;
v1 = 10;
v2 = 15;
Delta_phi0 = 0;

x30 = 0;
y30 = 0;
x40 = 5;
y40 = 0;
Delta_psi0 = 0;
v3 = v1;
v4 = v2;

% Startwerte
x1(1) = x10 + v1*Delta_t;
y1(1) = y10 + v1*sin(Delta_phi0)*Delta_t;
x2(1) = x20 - v2*sin(Delta_phi0)*Delta_t;
y2(1) = y20 + v2*cos(Delta_phi0)*Delta_t;

x3(1) = x30 + v3*Delta_t;
y3(1) = y30 + v3*sin(Delta_psi0)*Delta_t;
x4(1) = x40 - v4*sin(Delta_psi0)*Delta_t;
y4(1) = y40 + v4*cos(Delta_psi0)*Delta_t;

% Abstand 10
for i=1:n-12
    if x2(i)> x1(i)
        Delta_phi(i) = atan((y2(i)-y1(i))/(x2(i)-x1(i)));
        x1(i+1) = x1(i) + v1*cos(Delta_phi(i))*Delta_t;
        y1(i+1) = y1(i) + v1*sin(Delta_phi(i))*Delta_t;
        x2(i+1) = x2(i) - v2*sin(Delta_phi(i))*Delta_t;
        y2(i+1) = y2(i) + v2*cos(Delta_phi(i))*Delta_t;
    else
        Delta_phi(i) = atan((x2(i)-x1(i))/(y2(i)-y1(i)));
        y1(i+1) = y1(i) + v1*cos(Delta_phi(i))*Delta_t;
        x1(i+1) = x1(i) + v1*sin(Delta_phi(i))*Delta_t;
        y2(i+1) = y2(i) + v2*sin(Delta_phi(i))*Delta_t;
        x2(i+1) = x2(i) - v2*cos(Delta_phi(i))*Delta_t;
    end
end

% Abstand 5
for i=1:n-56
    if x4(i)> x3(i)
```



```
        Delta_psi(i) = atan((y4(i)-y3(i))/(x4(i)-x3(i)));
        x3(i+1) = x3(i) + v3*cos(Delta_psi(i))*Delta_t;
        y3(i+1) = y3(i) + v3*sin(Delta_psi(i))*Delta_t;
        x4(i+1) = x4(i) - v4*sin(Delta_psi(i))*Delta_t;
        y4(i+1) = y4(i) + v4*cos(Delta_psi(i))*Delta_t;
    else
        Delta_psi(i) = atan((x4(i)-x3(i))/(y4(i)-y3(i)));
        y3(i+1) = y3(i) + v3*cos(Delta_psi(i))*Delta_t;
        x3(i+1) = x3(i) + v3*sin(Delta_psi(i))*Delta_t;
        y4(i+1) = y4(i) + v4*sin(Delta_psi(i))*Delta_t;
        x4(i+1) = x4(i) - v4*cos(Delta_psi(i))*Delta_t;
    end
end

figure(1)
plot(x1,y1)
grid on
title('Ausweichmanöver Missile gegen Unmanned Fighter')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')

xlim([0 10])
ylim([0 10])
hold on
plot(x2,y2)
hold on
plot(x3,y3)
hold on
plot(x4,y4)
legend('v_1 = 10','v_2 = 15','v_3 = 10','v_4 = 15');

figure(2)
plot(Delta_phi)
figure(3)
plot(Delta_psi)
```