Aufgabe: Leiten Sie die geodätische Linie einer Kugeloberfläche in kartesischen Koordinaten her und lösen Sie die Differentialgleichungen durch ein rekurrentes neuronales Netzwerk.

Lösung: Für eine Fläche z in kartesischen Koordinaten der Form $z = z(x, y)$ ist das totale Differential bzw. die Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{r} = \left(x, y, z\right)$ nach den beiden unabhängigen Variablen x und y gegeben durch

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{dy}{ds},$$

wobei die Bogenlänge s definiert ist durch

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dxdy + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 dy^2.$$

Die Koeffizienten fassen wir zu einer Metrik

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

zusammen, womit sich das differentielle Wegelement auch wie folgt formulieren läßt:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(dx, dy\right)\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \left(dx, dy\right)\begin{pmatrix} g_{11}dx + g_{12}dy \\ g_{21}dx + g_{22}dy \end{pmatrix} \\ &= g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{21}dydx + g_{22}dy^2. \end{aligned}$$

Mit den Adjunkten

$$G_{ik} = \left(-1\right)^{i+k} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,k-1} & g_{1,k+1} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2,k-1} & g_{2,k+1} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i-1,1} & g_{i-1,2} & \cdots & g_{i-1,k-1} & g_{i-1,k+1} & \cdots & g_{i-1,n} \\ g_{i+1,1} & g_{i+1,2} & \cdots & g_{i+1,\mathrm{k}-1} & g_{i+1,k+1} & \cdots & g_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{n,k-1} & g_{n,k-1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}.$$

ist somit der im folgenden benötigte inverse metrische Tensor gegeben durch

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}^{T}.$$

Im zweidimensionalen Fall sind die Adjunkten besonders einfach zu berechnen:

$$G_{11} = g_{22}, \quad G_{12} = -g_{21}, \quad G_{21} = -g_{12}, \quad G_{22} = g_{11},$$

so daß

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

Mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)$$

können wir den inversen metrischen Tensor auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 & -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \\ -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} & \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix},$$

und mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

und der Skalarprodukte

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

vereinfacht sich die Determinante zu

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Damit erhalten wir für den metrischen Tensor den Ausdruck

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} & 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

und für sein Inverses die Relation

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\begin{pmatrix} 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 & -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \\ -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} & 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Bilden wir zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Bogenlänge, in die wir die erste einsetzen, erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} &= \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\mathbf{r}}{ds}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\mathbf{r}}{ds}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2.\end{aligned}$$

Ferner benötigen wir die darin auftauchenden zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}=\left(0,0,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\left(0,0,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right),\quad \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}=\left(0,0,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Die auf die Bogenlänge bezogene Oberflächenkurve ist dann und nur dann geodätisch, wenn die folgenden Skalarprodukte identisch verschwinden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}=0, \\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}=0\end{aligned}$$

Ausmultipliziert heißt das

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0, \\ &\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)^2\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0.\end{aligned}$$

Setzen wir die Skalarprodukte und die gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial y^2}=\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

in die obigen Gleichungen ein, erhalten wir Terme, die nur noch von den Ortskoordinaten abhängen:

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0,$$
$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0.$$

Diese Gleichungen können wir nach Multiplikation mit den Differentialen $\partial z/\partial x$ bzw. $\partial z/\partial y$ und anschließender Addition umformen in

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]$$
$$+\frac{\partial z}{\partial y}\left[\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]=0,$$

womit die Koeffizienten in den eckigen Klammern identisch verschwinden müssen, d.h.

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0,$$
$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0.$$

Durch Vergleich mit den Parametergleichungen

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\Gamma^1_{11}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{21}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0,$$
$$\frac{d^2y}{ds^2}+\Gamma^2_{11}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\Gamma^2_{12}+\Gamma^2_{21}\right)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}+\Gamma^2_{22}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=0$$

ergeben sich die Christoffelkoeffizienten zu

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},\quad \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},\quad \Gamma_{22}^{1}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},\quad \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Um diese nun für die Sphäre auszuwerten, benötigen wir die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Kugeloberfläche,[1] die als Funktion von x und y gegeben ist durch

$$z(x,y)=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}.$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Damit folgt sofort der charakteristische, für alle Christoffelkoeffizienten geltende Nenner

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen berechnen wir geradeaus zu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{R^2-y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,3}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{xy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,3}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{R^2-x^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}^{\,3}}.$$

Setzen wir diese Resultate in die Christoffelkoeffizienten ein, so folgt

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{x}{R^2}\frac{R^2-y^2}{R^2-x^2-y^2},\quad \Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{x}{R^2}\frac{xy}{R^2-x^2-y^2},\quad \Gamma_{22}^{1}=\frac{x}{R^2}\frac{R^2-x^2}{R^2-x^2-y^2},$$

$$\Gamma_{11}^{2}=\frac{y}{R^2}\frac{R^2-y^2}{R^2-x^2-y^2},\quad \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{y}{R^2}\frac{xy}{R^2-x^2-y^2},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{y}{R^2}\frac{R^2-x^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

Um die Richtigkeit unserer Ergebnisse zu überprüfen, rechnen wir sie noch einmal anhand der exakten Definition

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}=\frac{1}{2}\left[g^{\gamma 1}\left(\frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u_\beta}+\frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_1}\right)+g^{\gamma 2}\left(\frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u_\beta}+\frac{\partial g_{\beta 2}}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_2}\right)\right]$$

[1] Wir verwenden im weiteren Verlauf nur noch das positive Vorzeichen.

nach, wobei die Indizes nur die Werte 1 und 2 annehmen können. In kartesischen Koordinaten ergeben sich aus der ersten Differentialgleichung die folgenden 4 Relationen:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + g^{12}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\right],$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x}\right) + g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right],$$

$$\Gamma^1_{21} = \frac{1}{2}\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial y} - \frac{\partial g_{21}}{\partial y}\right)\right],$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\left[g^{11}\left(2\frac{\partial g_{21}}{\partial y} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right) + g^{12}\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right]$$

und 4 weitere Koeffizienten folgen aus der zweiten:

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}\left[g^{21}\frac{\partial g_{11}}{\partial x} + g^{22}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\right],$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\left[g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x}\right) + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right],$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\left[g^{21}\frac{\partial g_{11}}{\partial y} + g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x} + \frac{\partial g_{12}}{\partial y} - \frac{\partial g_{21}}{\partial y}\right)\right],$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\left[g^{21}\left(2\frac{\partial g_{21}}{\partial y} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right) + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right].$$

Zur Auswertung setzen wir alle benötigten partiellen Ableitungen ein, womit der metrische Tensor in kartesischen Koordinaten explizit die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Die Ableitungen stellen wir vorzugsweise in Matrixform dar, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial x} & \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial x} & \frac{\partial g_{22}}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\begin{pmatrix} 2xg_{11} & 2xg_{12} + y \\ 2xg_{21} + y & 2x\left(g_{22} - 1\right) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} & \frac{\partial g_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial y} & \frac{\partial g_{22}}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\begin{pmatrix} 2y\left(g_{11} - 1\right) & 2yg_{12} + x \\ 2yg_{21} + x & 2yg_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir den inversen Metrik-Tensor wie folgt ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}} \begin{pmatrix} 1+\dfrac{y^2}{R^2-x^2-y^2} & -\dfrac{xy}{R^2-x^2-y^2} \\ -\dfrac{xy}{R^2-x^2-y^2} & 1+\dfrac{x^2}{R^2-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{R^2-x^2-y^2}{R^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix},$$

so daß sich für die Christoffelsymbole die folgenden übersichtlichen Ausdrücke ergeben:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{R^2}\left[xg_{11}g_{22} - g_{12}\left(2xg_{12}+y\right) + yg_{12}\left(g_{11}-1\right)\right],$$
$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{R^2}\left(yg_{22}\left(g_{11}-1\right) - xg_{22}\left(g_{12}-g_{21}\right) - xg_{12}\left(g_{22}-1\right)\right),$$
$$\Gamma_{21}^{1} = \frac{1}{R^2}\left(yg_{22}\left(g_{11}-1\right) - yg_{12}\left(g_{12}-g_{21}\right) - xg_{12}\left(g_{22}-1\right)\right),$$
$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{R^2}\,g_{22}\left[\left(2yg_{21}+x\right) - x\left(g_{22}-1\right) - yg_{12}\right]$$

bzw.

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{R^2}\left[g_{11}\left(xg_{12}+y\right) + xg_{11}\left(g_{12}-g_{21}\right) - yg_{11}\left(g_{11}-1\right)\right],$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{R^2}\left[xg_{11}\left(g_{22}-1\right) + xg_{21}\left(g_{12}-g_{21}\right) - yg_{21}\left(g_{11}-1\right)\right],$$
$$\Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{R^2}\left[xg_{11}\left(g_{22}-1\right) + yg_{11}\left(g_{12}-g_{21}\right) - yg_{21}\left(g_{11}-1\right)\right],$$
$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{R^2}\left[\left(yg_{11}+xg_{21}\right)g_{22} - 2\left(yg_{21}+x\right)g_{21}\right].$$

Setzen wir die Tensorkomponenten ein, erhalten wir wieder die bereits bekannten Ausdrücke. Damit nehmen unsere Parametergleichungen folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{R^2-x^2-y^2}\left[\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{xy}{R^2}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]x = 0,$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{R^2-x^2-y^2}\left[\left(1-\frac{y^2}{R^2}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{xy}{R^2}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]y = 0,$$

die wir noch etwas kürzer fassen können, indem wir schreiben:

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{R^2-x^2-y^2}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{x}{R}\frac{dy}{ds}-\frac{y}{R}\frac{dx}{ds}\right)^2\right]x=0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{R^2-x^2-y^2}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{x}{R}\frac{dy}{ds}-\frac{y}{R}\frac{dx}{ds}\right)^2\right]y=0.$$

Mit der Substitution $s=vt$ lassen sich die Ableitungen nach der Bogenlänge in zeitliche Ableitungen überführen, d.h.

$$\ddot{x}+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2-\left(\frac{x}{R}\dot{y}-\frac{y}{R}\dot{x}\right)^2}{R^2-x^2-y^2}x=0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}+\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2-\left(\frac{x}{R}\dot{y}-\frac{y}{R}\dot{x}\right)^2}{R^2-x^2-y^2}y=0.$$

Das sind die Gleichungen eines harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{y}+\omega^2y=0$$

mit konstanter Kreisfrequenz

$$\omega^2=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2-\left(\frac{x}{R}\dot{y}-\frac{y}{R}\dot{x}\right)^2}{R^2-x^2-y^2}.$$

Lösungen können nur Sinus- und Kosinusfunktionen sein, wobei die Phasenverschiebung unerheblich ist. Multiplizieren wir die erste Differentialgleichung mit y und die zweite mit x und subtrahieren beide Gleichungen voneinander, so folgt die gekoppelte Differentialgleichung

$$x\ddot{y}-y\ddot{x}=0.$$

deren Lösungen mit einer zusätzlichen Konstanten b die Gestalt

$$\ddot{x}=-\frac{\omega R}{b}\dot{y} \quad \ddot{y}=\frac{\omega b}{R}\dot{x}$$

haben müssen, denn nur so erfüllen die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}=-\frac{\omega R}{b}y, \quad \dot{y}=\frac{\omega b}{R}x.$$

die Gleichung

$$\frac{x\dot{x}}{R^2}+\frac{y\dot{y}}{b^2}=0.$$

Setzen wir die Geschwindigkeiten in den obigen Ausdruck für die Kreisfrequenz ein, d.h.

$$\omega^2 = \frac{\frac{\omega^2 R^2}{b^2} y^2 + \frac{\omega^2 b^2}{R^2} x^2}{R^2 - \left(x^2 + y^2\right) + b^2 \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2},$$

ergibt sich nach Kürzung der Kreisfrequenz folgende Bahngleichung für die Projektion der Bewegung in die *x*-*y*-Ebene:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{R^2}{R^2 + b^2} + \frac{b^2}{R^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2.$$

Diese Funktion wird zur Gleichung einer Ellipse mit großer Halbachse $R = a$ und kleiner Halbachse *b*, wenn man setzt:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t,$$

denn nur dann gilt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Angenommen, wir würden die Lösung nicht a priori kennen. Dann müssen die vier bekannten Bestimmungsgleichungen

$$\dot{x} = -\frac{\omega a}{b} y, \quad \dot{y} = \frac{\omega b}{a} x,$$
$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y$$

Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems sein:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{b} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2}} y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2}} x,$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{a^2 - x^2 - y^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} x, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{a^2 - x^2 - y^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} y.$$

Wir können zur rekursiven Lösung dieser Differentialgleichungen folgenden Ansatz machen:

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i \Delta t, \quad y_{i+1} = y_i + \dot{y}_i \Delta t,$$
$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \ddot{x}_i \Delta t, \quad \dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i + \ddot{y}_i \Delta t,$$

zumal wir ja die folgenden Ableitungen bereits aus unserer Herleitung kennen:

$$\dot{x}_i = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}}{\sqrt{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}}\,y_i, \quad \dot{y}_i = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}}{\sqrt{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}}\,x_i,$$

$$\ddot{x}_i = -\frac{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}\,x_i, \qquad \ddot{y}_i = -\frac{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}\,y_i.$$

Mithin führt das zu den Lösungen

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\dfrac{a}{b}\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}\cdot y_i\Delta t}{\sqrt{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}}, \quad y_{i+1} = y_i + \frac{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}\cdot x_i\Delta t}{\sqrt{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}},$$

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i - \frac{\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2\right)x_i\Delta t}{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2}, \quad \dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i - \frac{\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2\right)y_i\Delta t}{a^2-x_i^2-y_i^2+b^2\left(\dfrac{x_i^2}{a^2}+\dfrac{y_i^2}{b^2}\right)^2},$$

wobei das Intervall $\Delta t = T/n$ entsprechend klein gewählt werden muß, um den Fehler gering zu halten. Die Anfangsbedingungen des rekurrenten neuronalen Netzwerks stellen wir in Vektornotation als Zustandsvektor dar:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \omega b \end{pmatrix},$$

und dementsprechend ist der Anfangswert der Kreisfrequenz gegeben durch

$$\omega_0^2 = \frac{\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2}{a^2-x_0^2-y_0^2+b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)^2} = \omega^2.$$

Für den ersten Intervallschritt berechnen wir nun zur Probe die jeweiligen Iterationswerte. Sie errechnen sich elementar zu

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 - \frac{a}{b}\omega y_0 \Delta t = a, \\
y_1 &= y_0 + \frac{b}{a}\omega x_0 \Delta t = \omega b \Delta t, \\
\dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - \omega^2 x_0 \Delta t = -\omega^2 a \Delta t, \\
\dot{y}_1 &= \dot{y}_0 - \omega^2 y_0 \Delta t = \omega b,
\end{aligned}$$

wobei sich die Kreisfrequenz

$$\omega_1^2 = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{a^2 - x_1^2 - y_1^2 + b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2} = \frac{\omega^4 a^2 \Delta t^2 + \omega^2 b^2}{-\omega^2 b^2 \Delta t^2 + b^2\left(1 + \omega^2 \Delta t^2\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{a^2}{b^2}\omega^2 \Delta t^2}{1 + \omega^2 \Delta t^2 + \omega^4 \Delta t^4}\omega^2 \approx \omega^2$$

kaum ändert. Daß dies mit steigenden Iterationsschritten so bleibt, zeigen wir nun noch für den zweiten Iterationsschritt:

$$x_2 = a\left(1 - \frac{1}{b}\frac{\sqrt{b^2 + a^2\omega^2\Delta t^2}}{\sqrt{1 + \omega^2\Delta t^2 + \omega^4\Delta t^4}}\omega^2\Delta t^2\right) \approx a,$$

$$y_2 = b\left(1 + \frac{1}{b}\frac{\sqrt{b^2 + a^2\omega^2\Delta t^2}}{\sqrt{1 + \omega^2\Delta t^2 + \omega^4\Delta t^4}}\right)\omega\Delta t \approx 2b\omega\Delta t,$$

$$\dot{x}_2 = -\omega a\left(1 - \frac{1}{b^2}\frac{b^2 + a^2\omega^2\Delta t^2}{1 + \omega^2\Delta t^2 + \omega^4\Delta t^4}\right)\omega\Delta t \approx 0,$$

$$\dot{y}_2 = \omega b\left(1 - \frac{1}{b^2}\frac{b^2 + a^2\omega^2\Delta t^2}{1 + \omega^2\Delta t^2 + \omega^4\Delta t^4}\omega^2\Delta t^2\right) \approx b\omega.$$

Auch hier gilt bei entsprechend kleiner Schrittweite

$$\omega_2^2 = \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{a^2 - x_2^2 - y_2^2 + b^2\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)^2} = \frac{\omega^2}{1 + 4\omega^2\Delta t^2 + 16\omega^4\Delta t^4} \approx \omega^2.$$

Dieses Verfahren können wir fortsetzen, indem wir zu immer höheren Indizes übergehen, wobei die Kreisfrequenz bis auf Rundungsfehler konstant bleibt.

Die Architektur unseres rekurrenten neuronalen Netzwerks haben wir in Abb. 1 dargestellt.

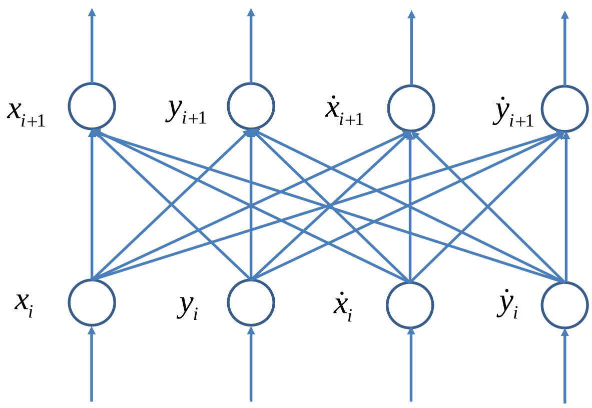

Abbildung 1. Netzwerkarchitektur eines gekoppelten harmonischen Oszillators

Die Zeitreihen der vier Neuronen lauten:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0\Theta_0(t) + x_1\Theta_1(t) + \ldots + x_n\Theta_n(t),\\
y(t) &= y_0\Theta_0(t) + y_1\Theta_1(t) + \ldots + y_n\Theta_n(t),\\
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0\Theta_0(t) + \dot{x}_1\Theta_1(t) + \ldots + \dot{x}_n\Theta_n(t),\\
\dot{y}(t) &= \dot{y}_0\Theta_0(t) + \dot{y}_1\Theta_1(t) + \ldots + \dot{y}_n\Theta_n(t),
\end{aligned}$$

mit den Gewichten x_i, y_i, $\dot{x}_i$ und $\dot{y}_i$ für $i = 0, \ldots, n$. Als Aktivierungsfunktion verwenden wir eine Stufen- bzw. Heavisidefunktion:

$$\Theta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In den Abb. 2 und 3 sind die Ergebnisse der Netzwerkberechnung für den phasenfreien Fall graphisch dargestellt. Wie man sieht, verlaufen *y*- und *z*-Komponente gleichphasig, ihre Amplituden sind kleiner als bei der *x*-Komponente, die um 90° phasenverschoben ist. Zuzüglich sind auch die Phasen zwischen Ortskoordinaten und Geschwindigkeiten um 90° phasenverschoben. An sich wären dafür keine 100.000 Iterationen erforderlich. Da jedoch die Oberflächenfunktion in kartesischen Koordinaten zwei verschiedene Vorzeichen aufweist, fällt die Unstetigkeitsstelle sofort sichtbar ins Auge. Solche Sprungstellen lassen sich nur durch Glättung der Daten und Verringerung der Schrittweiten beseitigen. Gleichzeitig sind derartige Unstetigkeiten auch ein Indikator dafür, daß die Rechenschrittweite heraufgesetzt werden muß, sonst bemerkt man oft nicht, ob die Genauigkeit ausreicht.

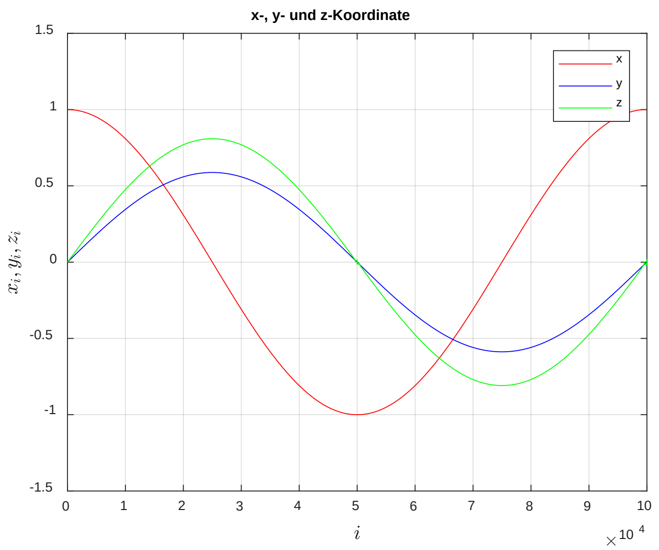

Abbildung 2. Ortskoordinaten des neuronalen Netzwerks bei gleichförmig-konstanter Kreisbewegung

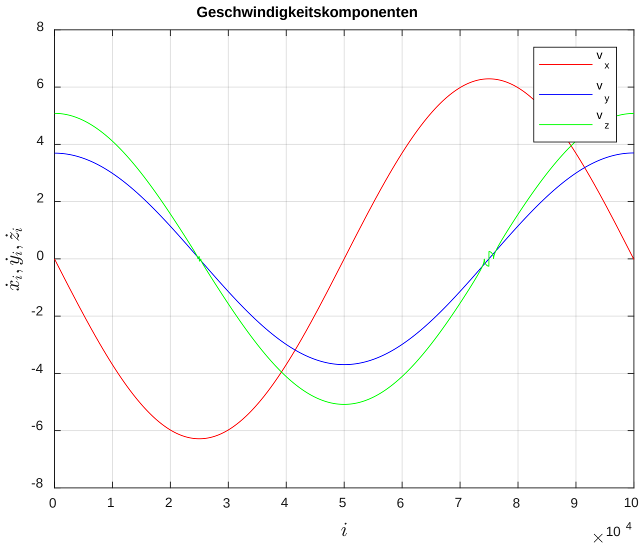

Abbildung 3. Geschwindigkeitskomponenten des neuronalen Netzwerks bei gleichförmig-konstanter Kreisbewegung

In Abb. 4 und 5 haben wir die dreidimensionale Bahnkurve der Geodätischen und ihre Projektion in die *x*-*y*-Ebene graphisch dargestellt.

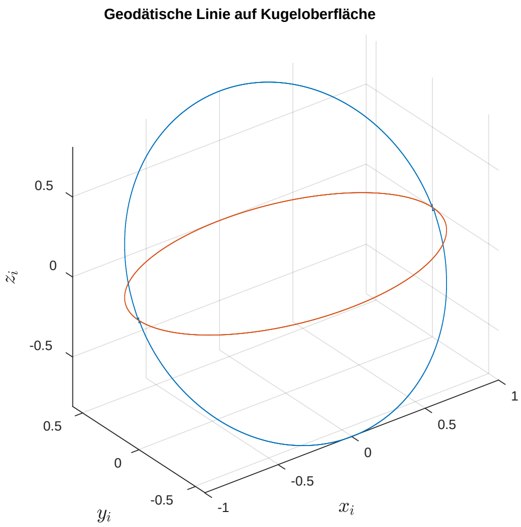

Abbildung 4. Geodätische Linie (Orthodrome) auf Kugeloberfläche mit Projektion in die *x*-*y*-Ebene

Dem nachfolgenden Programm liegt ein Polarwinkel von 36° zugrunde. Lediglich die *z*-Komponente wird dabei nicht durch ein neuronales Netzwerk gelöst, sondern mit Hilfe der Kugelgleichung abgeleitet. Generell lassen sich aber alle drei Komponenten durch ein neuronales Netzwerk behandeln, allerdings müßte dann die Zahl der Neuronen noch einmal um 2 erhöht werden. Im allgemeinen Fall kommt man bei einer dreidimensionalen Funktion mit den drei Grundfunktionen und den drei Ableitungen, d.h. mit 6 Neuronen, aus.

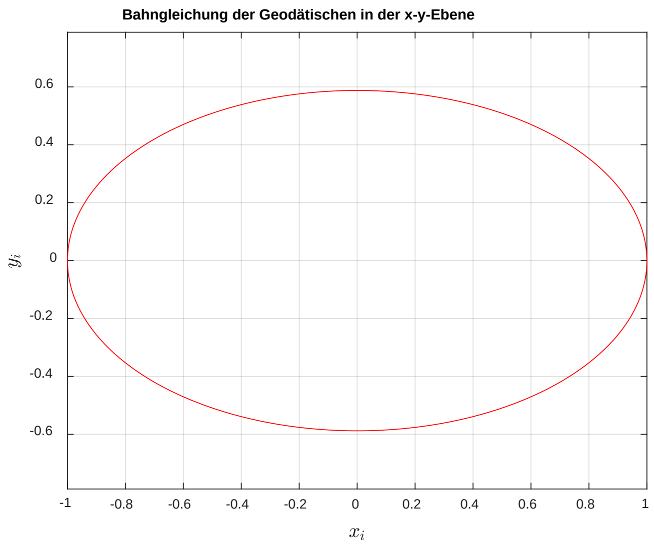

Abbildung 5. Projektion der geodätischen Linie auf die *x*-*y*-Ebene

Anhang

```
% Programm Geodätische Linie der Kugeloberfläche
% Rekurrentes neuronales Netzwerk aus n rekursiven Schichten
clear all
n = 100000;
T = 1;
theta = pi/5;
a = 1;
b = a*sin(theta);
Delta_t = T/n;
v = 2*pi*a/T;

% Startwerte 1. Schicht
x(1) = a;
y(1) = 0;
z(1) = 0;
v_x(1) = 0;
v_y(1) = 2*pi/T*b;
v_z(1) = sqrt(v^2 - v_x(1)^2 - v_y(1)^2);

for i = 1:n-1
    omega(i) = sqrt(v_x(i)^2+v_y(i)^2)/sqrt(a^2-x(i)^2-
y(i)^2+b^2*(x(i)^2/a^2+y(i)^2/b^2)^2);
    x(i+1) = x(i) - a/b*omega(i)*y(i)*Delta_t;
    y(i+1) = y(i) + b/a*omega(i)*x(i)*Delta_t;
    if y(i+1) >= 0
        z(i+1) = sqrt(abs(a^2 - x(i+1)^2 - y(i+1)^2));
    else
        z(i+1) = -sqrt(abs(a^2 - x(i+1)^2 - y(i+1)^2));
    end
    v_x(i+1) = v_x(i) - omega(i)^2*x(i)*Delta_t;
    v_y(i+1) = v_y(i) - omega(i)^2*y(i)*Delta_t;
    if v_y(i+1) >= 0
        v_z(i+1) = sqrt(abs(v^2 - v_x(i+1)^2 - v_y(i+1)^2));
    else
        v_z(i+1) = -sqrt(abs(v^2 - v_x(i+1)^2 - v_y(i+1)^2));
    end
end
```



```
figure(1)
plot(x,'-r')
grid on
title('x-, y- und z-Koordinate')
xlabel('$i$','interpreter','latex')
ylabel('$x_{i}, y_{i}, z_{i}$','interpreter','latex')
hold on
plot(y,'-b')
hold on
plot(z,'-g')
legend('x','y','z')

figure(2)
plot(v_x,'-r')
grid on
title('Geschwindigkeitskomponenten')
xlabel('$i$','interpreter','latex')
ylabel('$\dot x_{i}, \dot y_{i}, \dot z_{i}$','interpreter','latex')
hold on
plot(v_y,'-b')
hold on
plot(v_z,'-g')
legend('v_x','v_y','v_z')

figure(3)
plot(x,y,'-r')
grid on
title('Bahngleichung der Geodätischen in der x-y-Ebene')
axis equal
xlabel('$x_i$','interpreter','latex')
ylabel('$y_i$','interpreter','latex')

figure(4)
plot3(x,y,z)
grid on
title('Geodätische Linie auf Kugeloberfläche')
axis equal
xlabel('$x_i$','interpreter','latex')
ylabel('$y_i$','interpreter','latex')
zlabel('$z_i$','interpreter','latex')
hold on
plot(x,y)
```