

## Mathematikaufgabe 145

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Leiten Sie die geodätische Linie der Kugeloberfläche her und lösen Sie die Parametergleichungen durch ein rekurrentes neuronales Netzwerk.

**Lösung:** Gegeben sei eine Parametrisierung der Kugeloberfläche mit Radius  $r = R$ , Polwinkel  $\theta$  und Azimutwinkel  $\varphi$ . Dann kann eine Beziehung zwischen den kartesischen Koordinaten  $x, y$  und  $z$  zu den Kugelkoordinaten  $\theta$  und  $\varphi$  hergestellt werden gemäß

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

mit den inversen Beziehungen

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

In Kugelkoordinaten leitet sich die Bogenlänge aus dem Radiusvektor und seinen partiellen Ableitungen ab:

$$\mathbf{r}(\varphi, \theta) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} d\varphi,$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \theta} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist das infinitesimale Bogenelement gegeben durch

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}^2 &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} d\theta d\varphi + \left( \frac{\partial \mathbf{r}(\varphi, \theta)}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi^2 \\ &= R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Zum selben Ergebnis kommt man, wenn man die infinitesimalen Wegelemente

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi d\varphi + \cos \varphi \cos \theta d\theta \\ \sin \theta \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta \\ -\sin \theta d\theta \end{pmatrix}$$

quadratisch addiert:

## Mathematikaufgabe 145

---

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

d.h. die Weglänge ist vom gewählten Koordinatensystem unabhängig. Wir definieren nunmehr eine Metrik

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

derart, daß

$$\begin{aligned} ds^2 &= (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} R^2 d\theta \\ R^2 \sin^2 \theta d\varphi \end{pmatrix} \\ &= R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Division mit dem Zeitelement die Geschwindigkeit längs des Weges

$$v \equiv \frac{ds}{dt} = R \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}$$

und nach nochmaliger Integration die Weglänge auf der Kugeloberfläche

$$s(t) = R \int_0^t \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} dt.$$

Die geodätischen Linien genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1) \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) \frac{d\theta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

die wir durch Substitution des Bogenelements auf die zeitabhängige Form

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \Gamma_{11}^1 \dot{\theta}^2 + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^1) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{22}^1 \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \Gamma_{11}^2 \dot{\theta}^2 + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2) \dot{\theta} \dot{\varphi} + \Gamma_{22}^2 \dot{\varphi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

bringen können. Dabei sind

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \left[ g^{\gamma 1} \left( \frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial g_{\beta 1}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_1} \right) + g^{\gamma 2} \left( \frac{\partial g_{\alpha 2}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial g_{\beta 2}}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_2} \right) \right]$$

die Christoffelsymbole, wobei die Indizes nur die Werte 1 und 2 annehmen können. Zur Berechnung müssen wir noch die inverse Matrix der Metrik bilden,

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{R^4 \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix},$$

sowie deren Ableitungen berechnen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} & \frac{\partial g_{12}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial \theta} & \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2R^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_{12}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_{22}}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich für die erste Differentialgleichung die Koeffizienten

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + g^{12} \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) \right] = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \right) + g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right] = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 0, \\ \Gamma_{21}^1 &= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + g^{12} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} \right) \right] = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 0, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \left[ g^{11} \left( 2 \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + g^{12} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right] = -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

und für die zweite Differentialgleichung lauten sie

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left[ g^{21} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_1} + g^{22} \left( 2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} \right) \right] = -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left[ g^{21} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \right) + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right] = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \cot \theta, \\ \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} \left[ g^{21} \frac{\partial g_{11}}{\partial u_2} + g^{22} \left( \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} \right) \right] = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} = \cot \theta, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \left[ g^{21} \left( 2 \frac{\partial g_{21}}{\partial u_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u_1} \right) + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} \right] = \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u_2} = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir diese ein, so erhalten wir folgendes gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0, \\ \ddot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

## Mathematikaufgabe 145

---

Wir können hier sogleich zwei Spezialfälle betrachten. Bei Bewegung längs eines Meridians gilt  $\varphi = \text{const}$  und  $\dot{\varphi} = 0$ , d.h.

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \text{const} = \frac{v}{R}, & \ddot{\theta} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \text{const} = 0, & \ddot{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Bei Bewegung längs eines Breitenkreises gilt  $\theta = \text{const}$  und  $\dot{\theta} = 0$ , d.h. also

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \text{const} = 0, & \ddot{\theta} &= 0, \\ \dot{\varphi} &= \text{const} = \frac{v}{R \sin \theta_0}, & \ddot{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Als dritte Differentialgleichung kommt noch die Gleichung der Bahnbewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bei festem Radius  $R$  hinzu:

$$\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}.$$

Lösen wir diesen Ausdruck nach der Azimutwinkelgeschwindigkeit auf und setzen ihn in die erste Parametergleichung ein, so erhalten wir eine Differentialgleichung, die nur noch von der Breite  $\theta$  abhängt:<sup>1</sup>

$$\tan \theta \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \dot{\theta}^2 - \frac{v^2}{R^2} = 0.$$

Nach Trennung der Variablen folgt mit Hilfe der Relation

$$\frac{d \cot \theta}{d\theta} = -\frac{1}{\sin^2 \theta}$$

der Ausdruck

$$\frac{d\dot{\theta}}{\frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}^2} = \frac{\sin \theta \cos \theta dt}{\sin^2 \theta} = -\frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} \frac{d \cot \theta}{\dot{\theta}},$$

der nach nochmaliger Variablentrennung in den integrierbaren Ausdruck

$$\frac{\dot{\theta} d\dot{\theta}}{\frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}^2} = -\frac{\cot \theta d \cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

überführt werden kann. Die unbestimmten Integrale auf beiden Seiten entnimmt man am besten einer mathematischen Formelsammlung:

---

<sup>1</sup> Unsere Breite zählt hier nicht vom Äquator aus gerechnet, sondern vom Pol.

## Mathematikaufgabe 145

---

$$\int \frac{xdx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln(a^2 - x^2) + C_1, \quad \int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2.$$

Nunmehr können wir beide Seiten elementar integrieren:

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}(t)} \frac{xdx}{\frac{v^2}{R^2} - x^2} = - \int_{\cot \theta_0}^{\cot \theta(t)} \frac{xdx}{1+x^2},$$

womit die bestimmten Integrale folgende Lösungen haben:

$$-\frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{v^2}{R^2} - x^2 \right) \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}(t)} = -\frac{1}{2} \left[ \ln(1+x^2) \right]_{\cot \theta_0}^{\cot \theta(t)},$$

d.h.

$$\ln \left( \frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}(t)^2 \right) - \ln \left( \frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}_0^2 \right) = \ln(1 + \cot^2 \theta(t)) - \ln(1 + \cot^2 \theta_0)$$

bzw.

$$\ln \frac{\frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}(t)^2}{\frac{v^2}{R^2} - \dot{\theta}_0^2} = \ln \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}.$$

Nach  $\dot{\theta}$  aufgelöst lautet die Lösung der ersten Differentialgleichung

$$\dot{\theta}(t) = \pm \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{v^2 - R^2 \dot{\theta}_0^2}{v^2 \sin^2 \theta(t)} \sin^2 \theta_0} = \pm \sqrt{\frac{v^2}{R^2} - \frac{\dot{\theta}_0^2 \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}}.$$

Multiplizieren wir nun die zweite Differentialgleichung mit  $\dot{\phi}$ , erhalten wir

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\phi}^2 \dot{\theta} = 0$$

und nach entsprechender Umformung

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\phi}^2}{dt} = -2 \cot \theta \dot{\phi}^2 \dot{\theta}.$$

Erneut können wir die Variablen trennen:

$$\frac{d\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2} = -4 \cot \theta d\theta,$$

und den Ausdruck bestimmt integrieren:

$$\int_{\dot{\varphi}_0^2}^{\dot{\varphi}(t)^2} \frac{dx}{x} = -4 \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \cot x dx.$$

Gemäß Formelsammlung haben die Integrale auf beiden Seiten die Stammfunktionen

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad \int \cot x dx = \ln \sin x.$$

Die Integrationen ausgeführt, ergibt in den jeweiligen Intervallen

$$[\ln x]_{\dot{\varphi}_0^2}^{\dot{\varphi}(t)^2} = -4 [\ln \sin x]_{\theta_0}^{\theta(t)},$$

und nach den Integrationsgrenzen aufgelöst erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\ln \dot{\varphi}(t)^2 - \ln \dot{\varphi}_0^2 = -4 [\ln \sin \theta(t) - \ln \sin \theta_0].$$

Formen wir den Logarithmus entsprechend um,

$$\ln \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}_0} = \ln \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)},$$

gelangen wir zur zweiten Lösung des gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungssystems:

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}.$$

Setzen wir  $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$ , so lauten die Lösungen der geodätischen Linie in Kugelkoordinaten:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 \frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}, \quad \dot{\theta}(t) = \pm \sqrt{\frac{v^2}{R^2} - \omega_0^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}},$$

jeweils in den Grenzen  $0 \leq t \leq T$ . Dabei hängt das Vorzeichen davon ab, ob der Polarwinkel mit der Zeit zu- oder abnimmt. Bei  $\varphi = \varphi_0 \pm \pi/2$  findet nach  $90^\circ$  Kreisbewegung auf jeden Fall ein Vorzeichenwechsel statt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir  $\varphi_0 = 0$ . Abschließend suchen wir noch nach der Extremwerten der Funktion  $\dot{\theta}$ . Diese liegen dort, wo

$$\ddot{\theta}(t) = \pm \frac{\omega_0^2 \sin^4 \theta_0}{\sqrt{\frac{v^2}{R^2} - \omega_0^2 \frac{\sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta(t)}}} \frac{\cot \theta(t)}{\sin^2 \theta(t)} = 0$$

## Mathematikaufgabe 145

ist, also bei  $t = T/4$ . Beim Übergang vom 1. zum 2. sowie vom 3. zum 4. Quadranten folgt aufgrund der Tatsache, daß es keine Unstetigkeiten geben darf, und aufgrund des Vorzeichenwechsels von  $\dot{\theta}$  eine Bestimmungsgleichung für  $\omega_0$ :

$$-\sqrt{\frac{v^2}{R^2} - \frac{\omega_0^2}{\sin^2 \theta_{T/4}}} = \sqrt{\frac{v^2}{R^2} - \frac{\omega_0^2}{\sin^2 \theta_{T/4}}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{v^2}{R^2} - \frac{\omega_0^2}{\sin^2 \theta_{T/4}} = 0,$$

woraus folgt:

$$\omega_0 = \frac{v}{R} \sin \theta_{T/4} = \frac{v}{R} \sin \theta_{3T/4}.$$

Damit lassen sich die Parametergleichungen weiter vereinfachen und wir können schreiben:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v \sin \theta_{T/4}}{R \sin^2 \theta(t)} \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq T$$

bzw.

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} -\frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4}}{\sin^2 \theta(t)}} & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4}}{\sin^2 \theta(t)}} & \text{für} \quad \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4}}{\sin^2 \theta(t)}} & \text{für} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ -\frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4}}{\sin^2 \theta(t)}} & \text{für} \quad \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

Ersetzen wir den Differential- durch den Differenzenquotienten, ergeben sich die beiden Rekursionsformeln

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{v \sin \theta_{T/4} \sin^2 \theta_0}{R \sin^2 \theta_i} \Delta t, \quad \theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_i - \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \Delta t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, \\ \theta_i + \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \Delta t & \text{für} \quad \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ \theta_i + \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \Delta t & \text{für} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{3T}{4}, \\ \theta_i - \frac{v}{R} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \Delta t & \text{für} \quad \frac{3T}{4} \leq t \leq T. \end{cases}$$

## Mathematikaufgabe 145

---

Da wir es mit einer Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit zu tun haben, lassen sich mittels der Beziehungen

$$\frac{v}{R} = \frac{2\pi}{T}, \quad \Delta t = \frac{1}{n} \frac{T}{4},$$

wobei  $n$  die Zahl der Schichten des neuronalen Netzwerks angibt, durch Eliminierung der Periodendauer  $T$  noch weitere Vereinfachungen treffen:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi \sin \theta_{T/4} \sin^2 \theta_0}{2 \sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } 0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}, \\ \theta_i + \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_i \leq \pi, \\ \theta_i + \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } \pi \leq \varphi_i \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_{3T/4} \sin^4 \theta_0}{\sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_i \leq 2\pi. \end{cases}$$

Verwenden wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die folgenden Anfangs- und Endwerte:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{T/4} = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_{3T/4} = \frac{3\pi}{4},$$

so ergeben sich zum Schluß die einfachen Gleichungen:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi \sqrt{2}}{4 \sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \begin{cases} \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } 0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}, \\ \theta_i + \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \varphi_i \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n} & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq \varphi_i \leq 2\pi. \end{cases}$$

Wie man sieht, hängt  $\theta_{i+1}$  nicht vom Azimutwinkel  $\varphi_i$  ab. In der folgenden Graphik stellt sich nun unsere Netzwerkarchitektur wie folgt dar. Die beiden Neuronen der  $i$ ten Schicht  $\theta_i$  und  $\varphi_i$  liefern über ihre ersten partiellen Ableitungen die Gewichtsbeiträge zur  $(i+1)$ ten Schicht.

In Abb. 2 ist die Treppenfunktion des 1. Neurons dargestellt:

$$\theta(t) = \theta_0 \Theta_0(t) + \theta_1 \Theta_1(t) + \dots + \theta_n \Theta_n(t),$$



mit den Gewichten  $\theta_i$  für  $i = 0, \dots, n$ .<sup>2</sup>

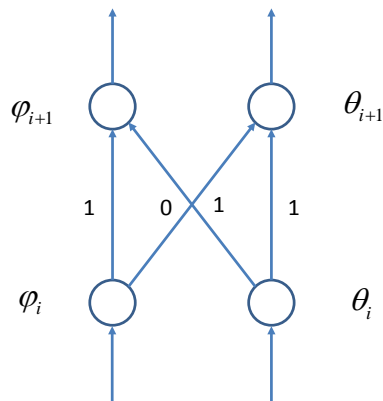


Abbildung 1. Netzwerkarchitektur des rekurrenten neuronalen Netzwerks

Als Aktivierungsfunktion verwenden wir eine Stufen- bzw. Heavisidefunktion:

$$\Theta_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

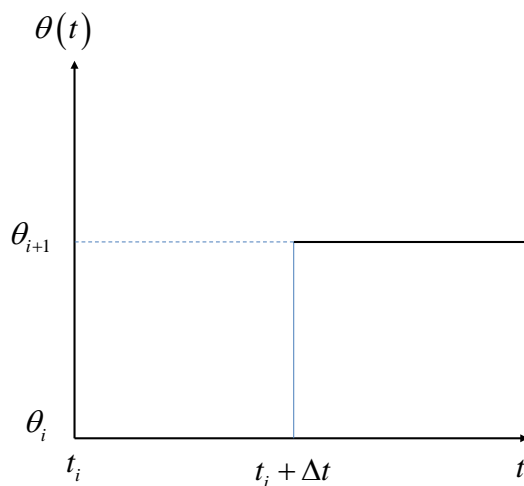


Abbildung 2. Treppenfunktion des 1. Neurons

Entsprechend lautet die Treppenfunktion des 2. Neurons<sup>3</sup>

$$\varphi(t) = \varphi_0 \Theta_0(t) + \varphi_1 \Theta_1(t) + \dots + \varphi_n \Theta_n(t).$$

Wir treffen nun je nach Quadrant der Bewegung 4 Fallunterscheidungen.

Im 1. Quadranten mit  $\varphi_i \in [0, \pi/2]$  bzw. im Intervall  $[0, T/4]$  definieren wir als Anfangsbedingungen

<sup>2</sup> Die Gewichte des rekurrenten Netzwerks sind hier die partiellen Ableitungen der Flächenparameter.

<sup>3</sup> An dieser Stelle ersparen wir uns die identische Darstellung.

## Mathematikaufgabe 145

---

$$\varphi_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{T}, \quad \dot{\theta}_0 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{T},$$

wobei die Bewegung ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Schnittpunkt des Nullmeridians mit dem Äquator beginnt und nach Durchlaufen eines Azimuts von  $90^\circ$  den dortigen Meridian genau bei einer Breite von  $45^\circ$  schneidet. Damit ergeben sich folgende Rekursionsgleichungen:

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n}.$$

Im 2. Quadranten mit  $\varphi_i \in [\pi/2, \pi]$  bzw. im Intervall  $[T/4, T/2]$  gilt für die Anfangsbedingungen aus Stetigkeitsgründen

$$\varphi_{T/4} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{T/4} = \frac{\pi}{4}, \quad \dot{\varphi}_{T/4} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{T}, \quad \dot{\theta}_{T/4} = 0.$$

Damit ergeben sich die Rekursionsgleichungen

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n},$$

die sich bis auf das Vorzeichen nicht von denen des 1. Quadranten unterscheiden.

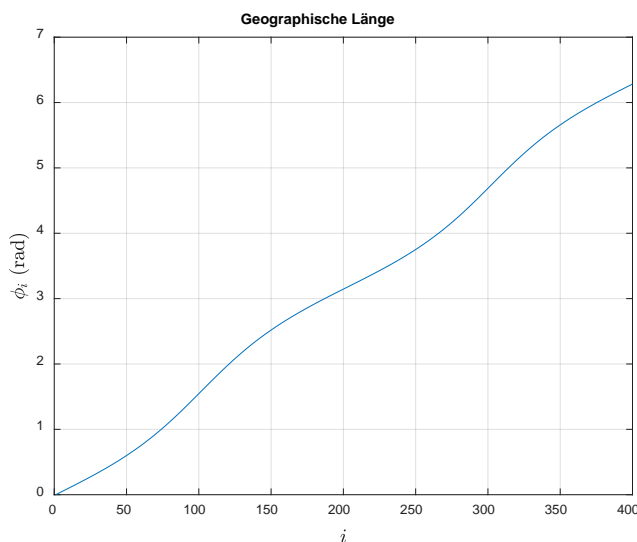


Abbildung 3. Die geographische Länge verläuft nicht ganz linear zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$

Im 3. Quadranten mit  $\varphi_i \in [\pi, 3\pi/2]$  bzw. im Intervall  $[T/2, 3T/4]$  gilt aus Symmetriegründen wie im 1. Quadranten

$$\varphi_{T/2} = \pi, \quad \theta_{T/2} = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}_{T/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T}, \quad \dot{\theta}_{T/2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T},$$

## Mathematikaufgabe 145

d.h. es gibt keinen Vorzeichenwechsel und das Vorzeichen bleibt positiv. Die Winkelgeschwindigkeiten sind also nach einer halben Periode wieder genauso groß wie zu Beginn der Bewegung. Es gelten daher die Rekursionsgleichungen

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i}} \frac{1}{n},$$

die denen des 2. Quadranten entsprechen.

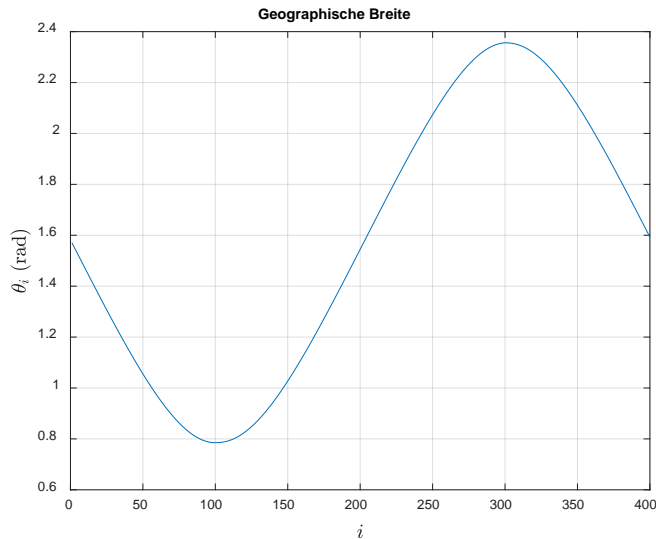


Abbildung 4. Die geographische Breite variiert in unserem Fall zwischen  $45^\circ$  und  $135^\circ$

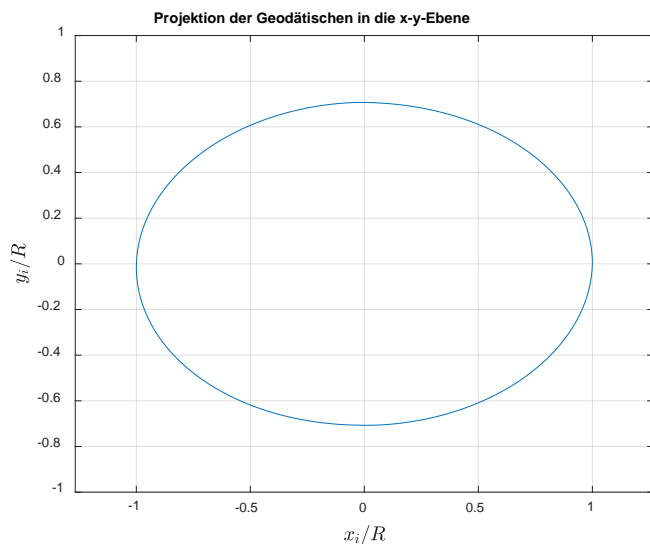


Abbildung 5. Die Projektion eines Großkreises auf die x-y-Ebene liefert eine Ellipse

Im 4. Quadranten mit  $\varphi_i \in [3\pi/2, 2\pi]$  bzw. im Intervall  $[3T/4, T]$  gilt aus Symmetriegründen wie im 2. Quadranten

$$\varphi_{3T/4} = \frac{3\pi}{2}, \quad \theta_{3T/4} = \frac{3\pi}{4}, \quad \dot{\varphi}_{3T/4} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{T}, \quad \dot{\theta}_{3T/4} = 0,$$

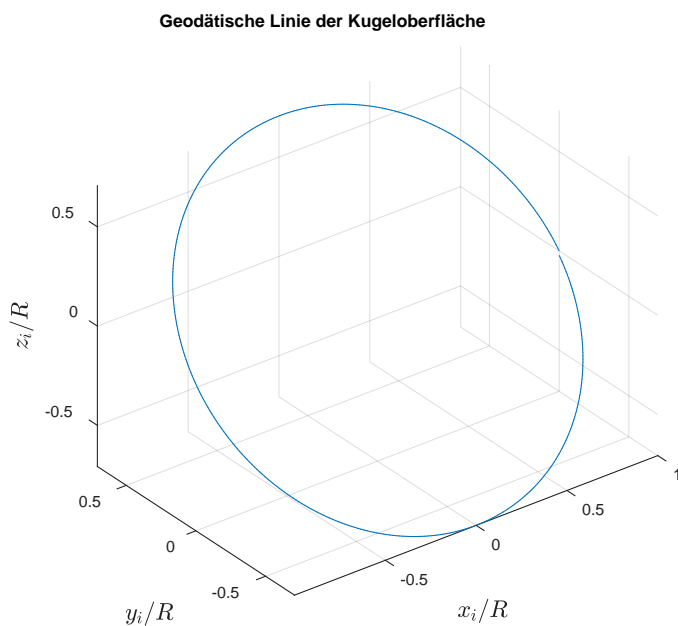
## Mathematikaufgabe 145

und es gilt das negative Vorzeichen. Wir haben hier die Rekursionsgleichungen

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2} \sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}, \quad \theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2 \sin^2 \theta_i} \frac{1}{n}},$$

die denen des 1. Quadranten entsprechen. In Abb. 3 ist die geographische Länge und in Abb. 4 die geographische Breite dargestellt. In Abb. 5 erkennen wir, daß die in die  $x$ - $y$ -Ebene projizierten geodätischen Linien Ellipsen darstellen.

Die Raumkurve der geodätischen Linien ist abschließend in Abb. 6 zu erkennen. Es handelt sich um eine Orthodrome, einen Großkreis.



**Abbildung 6. Großkreis auf der Kugeloberfläche durch ein rekurrentes neuronales Netzwerk berechnet**

Mit Hilfe einer Signum-Funktion könnte man theoretisch ganz auf Fallunterscheidungen verzichten und eine geschlossene Lösung angeben.

Die Lösung der Aufgabenstellung in kartesischen Koordinaten ist zwar deutlich aufwendiger, aber auch das wäre möglich. Benötigt werden dazu jedoch 4 Neuronen.

# Mathematikaufgabe 145

---

## Anhang

```
% Programm Geodätische Linie der Kugeloberfläche
% Rekurrentes neuronales Netzwerk aus 400 rekursiven Schichten
% Rekurrentes Neuron 1 (phi) Funktion von Neuron 1 und 2
% Rekurrentes Neuron 2 (theta) nur Funktion von Neuron 2
clear all
n = 100;

% Startwerte 1. Schicht
phi(1) = 0;
theta(1) = pi/2;
x(1) = sin(theta(1))*cos(phi(1));
y(1) = sin(theta(1))*sin(phi(1));
z(1) = cos(theta(1));

for i = 1:n-1
    phi(i+1) = phi(i) + 1/n*pi/4*sqrt(2)/sin(theta(i))^2;
    theta(i+1) = theta(i) - 1/n*pi/2*sqrt(abs(1 - 1/2/sin(theta(i))^2));
    x(i+1) = sin(theta(i+1))*cos(phi(i+1));
    y(i+1) = sin(theta(i+1))*sin(phi(i+1));
    z(i+1) = cos(theta(i+1));
end

for i = n:2*n-1
    phi(i+1) = phi(i) + 1/n*pi/4*sqrt(2)/sin(theta(i))^2;
    theta(i+1) = theta(i) + 1/n*pi/2*sqrt(abs(1 - 1/2/sin(theta(i))^2));
    x(i+1) = sin(theta(i+1))*cos(phi(i+1));
    y(i+1) = sin(theta(i+1))*sin(phi(i+1));
    z(i+1) = cos(theta(i+1));
end

for i = 2*n:3*n-1
    phi(i+1) = phi(i) + 1/n*pi/4*sqrt(2)/sin(theta(i))^2;
    theta(i+1) = theta(i) + 1/n*pi/2*sqrt(abs(1 - 1/2/sin(theta(i))^2));
    x(i+1) = sin(theta(i+1))*cos(phi(i+1));
    y(i+1) = sin(theta(i+1))*sin(phi(i+1));
    z(i+1) = cos(theta(i+1));
end

for i = 3*n:4*n-1
    phi(i+1) = phi(i) + 1/n*pi/4*sqrt(2)/sin(theta(i))^2;
    theta(i+1) = theta(i) - 1/n*pi/2*sqrt(abs(1 - 1/2/sin(theta(i))^2));
    x(i+1) = sin(theta(i+1))*cos(phi(i+1));
    y(i+1) = sin(theta(i+1))*sin(phi(i+1));
    z(i+1) = cos(theta(i+1));
end

figure(1)
plot(phi)
grid on
title('Geographische Länge')
xlabel('$i$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\phi_i$ (rad)', 'interpreter', 'latex')

figure(2)
plot(theta)
grid on
title('Geographische Breite')
```

## Mathematikaufgabe 145

---

```
xlabel('$i$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$\theta_i$ (rad)', 'interpreter', 'latex')

figure(3)
plot(x,y)
grid on
title('Projektion der Geodätischen in die x-y-Ebene')
xlim([-1 1])
ylim([-1 1])
axis equal
xlabel('$x_i/R$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y_i/R$', 'interpreter', 'latex')

figure(4)
plot3(x,y,z)
grid on
title('Geodätische Linie der Kugeloberfläche')
axis equal
xlabel('$x_i/R$', 'interpreter', 'latex')
ylabel('$y_i/R$', 'interpreter', 'latex')
zlabel('$z_i/R$', 'interpreter', 'latex')
```