Aufgabe: Beschreiben Sie die Entwicklung einer Population, wenn sie einen bestimmten Prozentsatz ihrer theoretisch erreichbaren maximalen Größe überschritten hat. Welche Schlußfolgerungen lassen sich daraus für die Weltbevölkerung ziehen?

Lösung: Gesucht wird nach einer mathematischen Gesetzmäßigkeit, die uns gestattet, aus der Größe X_i einer Population zu einem gewissen Anfangszeitpunkt auf die Größe X_{i+1} nach einer Fortpflanzungsperiode von beispielsweise einem Jahr zu schließen. Die Individuenzahl sei im Folgejahr um einen Wachstumsfaktor γ größer geworden als die aktuelle Population. Durch verschiedene Gründe, die allesamt zum Tod führen, verringert sich die Individuenzahl innerhalb der Fortpflanzungsperiode in Abhängigkeit von der Differenz ihrer aktuellen Größe zu einer theoretischen Maximalgröße K mit der Proportionalitätskonstante ε um den Faktor

$$\delta = \varepsilon\left(K - X_n\right).$$

Um bei der Berechnung der Individuenzahl des Folgejahres sowohl die Wachstums- als auch die Sterberate zu berücksichtigen, multiplizieren wir die aktuelle Populationsgröße mit beiden Proportionalitätskonstanten ε und δ. Wir erhalten damit die sogenannte logistische Gleichung[1]

$$X_{i+1} = \gamma\delta X_i = \gamma\varepsilon X_i\left(K - X_n\right).$$

Um unsere Untersuchungen auf Werte zwischen 0 und 1 zu beschränken, normieren wir die absoluten Populationsgrößen auf die Maximalgröße K entsprechend

$$P\left(i\right) = \frac{X_i}{K}.$$

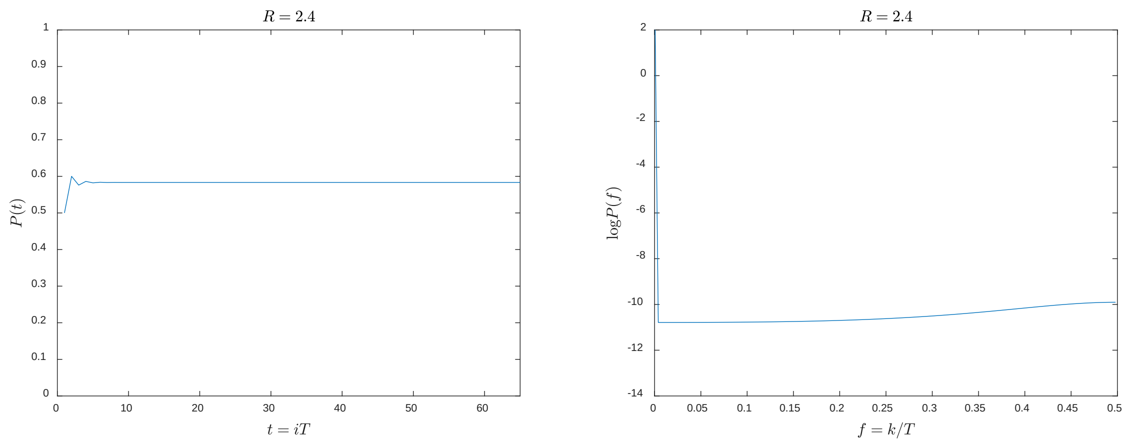

Abbildung 1. Alternierende Folge der logistischen Gleichung abwechselnd über und unter dem Grenzwert

Mit der Abkürzung $R = \gamma\varepsilon K$ lautet die logistische Gleichung dann wie folgt:

[1] Die logistische Gleichung spielt als Aktivierungsfunktion neuronaler Netzwerke eine gewisse Rolle.

$$P(i+1) = R \cdot P(i)\left(1 - P(i)\right).$$

Mit R von 0 bis 1 stirbt die Population in jedem Fall aus. Mit R zwischen 1 und 2 nähert sich die Population monoton dem Grenzwert $(R-1)/R$. Für R zwischen 2 und 3 approximiert die Population ihren Grenzwert alternierend, d. h. die Werte liegen ab einem bestimmten i abwechselnd über oder unter dem Grenzwert. Eine logistische Kurve mit einer Wachstumsrate zwischen 1 und 2 verläuft S-förmig.

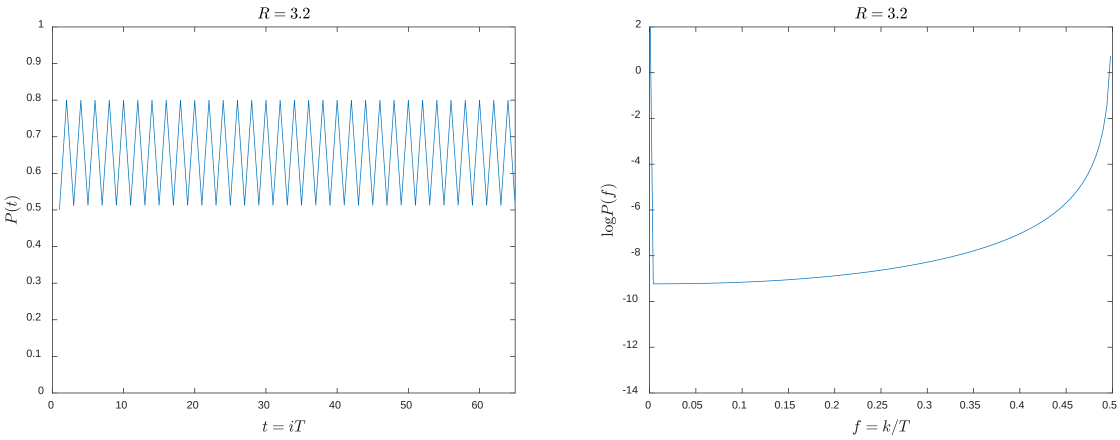

Abbildung 2. Zeitreihenentwicklung und Frequenzbereich der logistischen Gleichung mit 2 Häufungspunkten

Bei einem R zwischen 3 und $1+\sqrt{6}$ (Abb. 2) wechselt die Folge bei fast allen Startwerten zwischen den Umgebungen zweier Häufungspunkte. Im Frequenzspektrum entspricht das einer Linie bei 0,5. Die Oszillationen entsprechen den Maxima und Minima der beiden Populationen eines Räuber-Beute-Systems. Phasenverschoben zur Räuber- verhält sich die Beutepopulation.

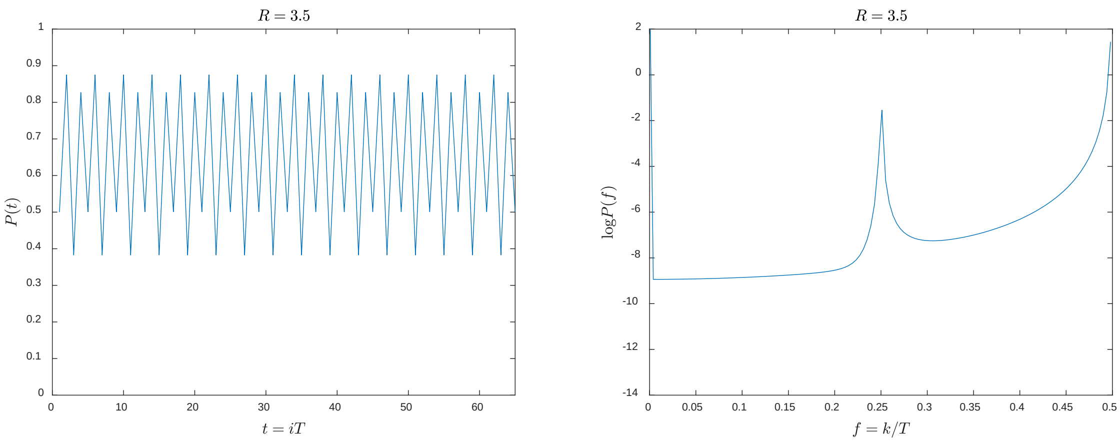

Abbildung 3. Zeitreihenentwicklung und Frequenzbereich der logistischen Gleichung mit 4 Häufungspunkten

Bei einem R zwischen $1+\sqrt{6}$ und ungefähr 3,54 (Abb. 3) wechselt die Folge bei fast allen Startwerten zwischen den Umgebungen von vier Häufungspunkten. Das entspricht im Frequenzspektrum zwei Linien bei 0,5 und 0,25. Wird R größer als 3,54 (Abb. 4), stellen sich erst 8, dann 16, 32 usw. Häufungspunkte ein. Bei einem R von 3,57 (Abb. 5) setzt das Chaos ein.

Die Folge springt zunächst periodisch zwischen den Umgebungen der nun instabilen Häufungspunkte umher. Mit weiter wachsendem *R* verschmelzen diese Intervalle so, daß sich deren Anzahl im Rhythmus der Feigenbaumkonstante halbiert, bis es nur noch ein Intervall gibt, in dem die Folge chaotisch ist. Perioden sind dann nicht mehr erkennbar. Winzige Änderungen des Anfangswertes resultieren in unterschiedlichsten Folgewerten – eine Eigenschaft des Chaos.

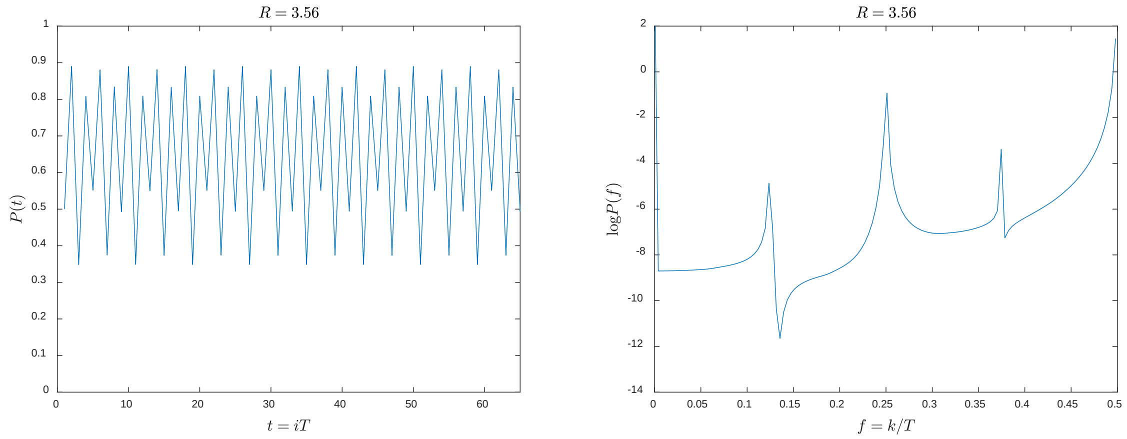

Abbildung 4. Zeitreihenentwicklung und Frequenzbereich der logistischen Gleichung mit 8 Häufungspunkten

Bei den meisten Koeffizienten kommt es zwischen 3,57 und 4 zu chaotischem Verhalten, obwohl für bestimmte *R* auch wieder Häufungspunkte vorhanden sind. So verdoppeln sich etwa in der Nähe von $R = 3{,}82$ bei steigendem *R* die Häufungspunkte, indem zuerst 3, dann 6 und schließlich 12 oder noch mehr Häufungspunkte auftauchen. Ebenso gibt es R-Werte mit 5 oder mehr Häufungspunkten, alle Periodendauern können auftreten.

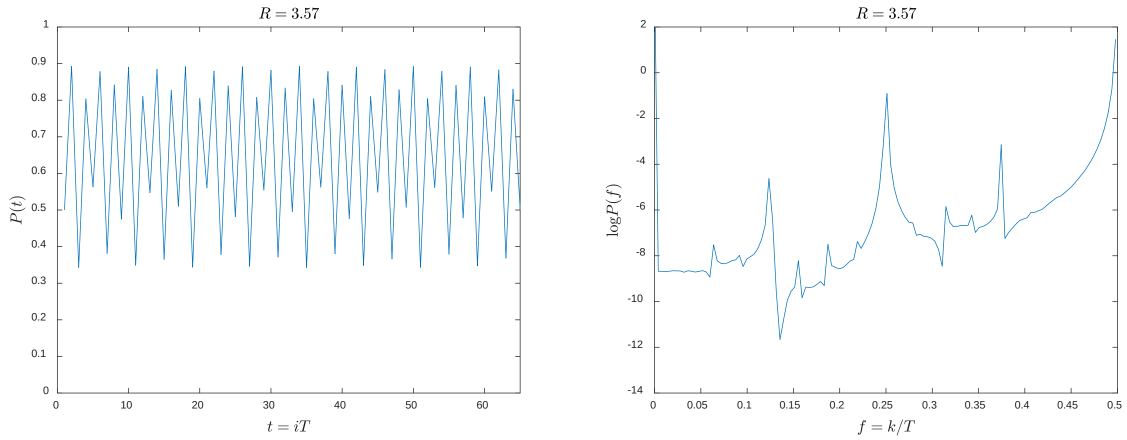

Abbildung 5. Zeit- und Frequenzbereich der logistischen Gleichung mit instabilen Häufungspunkten

Die logistische Gleichung zeigt eindrucksvoll, wie eine Population, die Teil eines Räuber-Beute-Systems ist, bei Überschreitung einer gewissen Populationsgröße[2] aus dem stabilen Gleichgewicht gerät. Zugleich werden die Ausschläge der Amplituden in der Zeitdomäne sehr groß. Aber auch wenn alle diese Annahmen unter der Voraussetzung eines gleichbleibenden *R*

[2] Der genaue Wert ist unbekannt und läßt sich erst ermitteln, wenn in einer Population Anzeichen eines chaotischen Verhaltens auftreten.

getroffen werden, ist nicht ganz sicher, ob die Größe R auch wirklich konstant bleibt oder auf einen Wert unter 1 abfällt, so daß beide Populationen aussterben.[3]

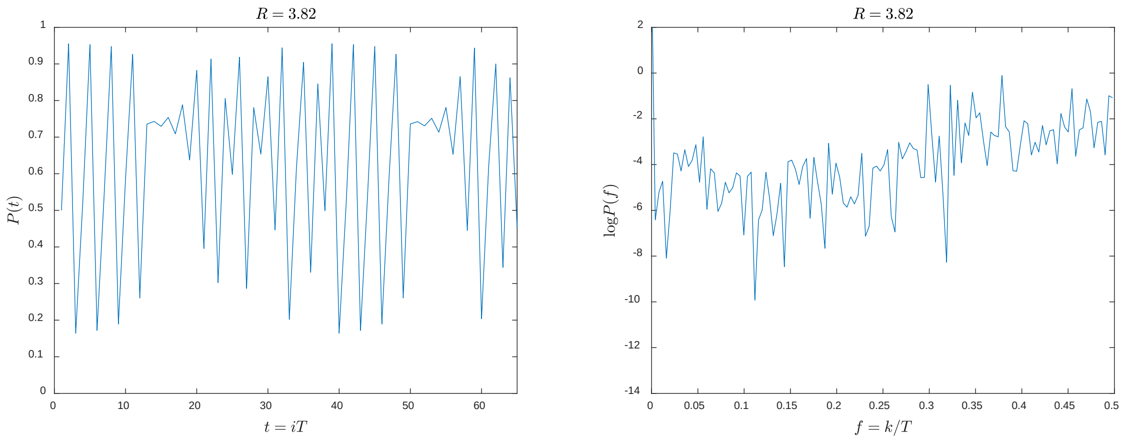

Abbildung 6. Chaotisches Verhalten der logistischen Gleichung im Zeit- und Frequenzbereich

Die vorgenannten Effekte treten natürlich ebenso in menschlichen Populationen auf, wobei es immer mindestens eine Räuber- und eine Beutepopulation gibt, die sich nach Überschreiten des kritischen Werts gegenseitig auslöschen können. Aber auch wenn es nicht so schlimm kommt, ist der Trend zu chaotischen Entwicklungen in der Gesellschaft unverkennbar. Natürliche Systeme bleiben unter normalen Wachstumsbedingungen im Rahmen, erst wenn das Wachstum jenen kritischen Wert K überschreitet, setzt die Spaltung ein, und Spaltung bedeutet eben nichts anderes als weitläufiges Chaos.

Anhang

```
% Formel von Robert May
clear all

R = 2.4;
n = 250;
P(1) = 0.5;
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end

figure(1)
plot(P)
title('$R=2.4$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(2)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
```

[3] Theoretisch kann ein ideales Räuber-Beute-System nicht aussterben.


```
title('$R=2.4$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])

R = 3.2;
% Ein Häufungspunkt
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end

figure(3)
plot(P)
title('$R=3.2$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(4)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
title('$R=3.2$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])

R = 3.5;
% Zwei Häufungspunkte
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end

figure(5)
plot(P)
title('$R=3.5$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(6)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
title('$R=3.5$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])

R = 3.56;
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end
```



```
figure(7)
plot(P)
title('$R=3.56$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(8)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
title('$R=3.56$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])

R = 3.57;
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end

figure(9)
plot(P)
title('$R=3.57$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(10)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
title('$R=3.57$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])

R = 3.82;
% Chaotisches Verhalten
for i = 1:n
    P(i+1) = R*P(i)*(1 - P(i));
end

figure(11)
plot(P)
title('$R=3.82$','interpreter','latex')
xlabel('$t=iT$','interpreter','latex')
ylabel('$P(t)$','interpreter','latex')
xlim([0 65])
ylim([0 1])

figure(12)
X = fft(P,251);
Pxx = X.*conj(X)/251;
```

```
Pxy = log(Pxx);
f = 1/251*(0:125);
plot(f,Pxy(1:126))
title('$R=3.82$','interpreter','latex')
xlabel('$f=k/T$','interpreter','latex')
ylabel('log$P(f)$','interpreter','latex')
ylim([-14 2])
```

