Aufgabe: Lösen Sie das Traveling Salesman-Problem mit Hilfe eines Hopfield-Netzes. Welche analogen Aufgaben aus der autonomen Luftfahrt können damit gelöst werden?

Lösung: Das Traveling Salesman-Problem hat die Aufgabenstellung, den kürzesten Weg zu finden, auf dem eine gegebene Anzahl von durch geradlinige[1] Verkehrswege miteinander verbundenen Städten der Reihe nach angefahren werden müssen, wenn jede Stadt nur einmal besucht werden darf und der Weg zum Ausgangspunkt zurückführen soll.[2] In der folgenden Matrix bilden die Städte p in der Tour die Zeilen, die Reihenfolge der Städte i die Spalten. Eine Tour, bei der die Städte 1, 2, 3, 4, 5 in der Reihenfolge 3, 2, 5, 1, 4 besucht werden, ist in nachfolgender Matrix dargestellt.

	$i=1$	2	3	4	5
$p=1$	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0

Tabelle 1. Matrix der Tour 3-2-5-1-4

Bei n Städten gibt es $(n-1)!$ Touren mit $2^{n-2}+1$ gegenseitigen Abständen. Bei 5 Städten sind dies 24 Touren und 9 Abstände, unter denen die kürzeste Tour herausgesucht werden muß. Die Aufgabenstellung läßt sich bis zu einer gewissen Obergrenze kombinatorisch lösen; wenn es sich jedoch um eine steigende Anzahl von Städten handelt, ist das irgendwann nicht mehr möglich. In diesem Fall kann jedoch auf ein neuronales Netzwerk zurückgegriffen werden. Im folgenden wird gezeigt, wie die Aufgabenstellung mittels eines Hopfield-Netzes gelöst werden kann.[3]

Jedes Neuron wird dabei durch die zwei Indizes p, i charakterisiert, d.h. v_{pi} kennzeichnet dasjenige Neuron, bei dem die Stadt p an der Position i steht. In Abb. 1 ist ein solches Hopfield-Netz graphisch dargestellt; es besteht aus nur einer Schicht, in der jedes Neuron mit jedem anderen verbunden ist, außer mit sich selbst. Das Hopfield-Netz zählt zu den sogenannten rekurrenten Netzen, die nach dem Cohen-Grossberg-Theorem stabil sind, wenn die Gewichtsmatrix symmetrisch ist und die Hauptdiagonale nur Nullen enthält, d.h. wenn gilt

$$w_{ij} = w_{ji} \text{ für } i \neq j \quad \text{und} \quad w_{ii} = 0 \quad \text{für alle } i.$$

[1] In der Regel sind zweidimensionale Wege nicht geradlinig, sondern mehr oder weniger kurvenreich.
[2] Im Falle einer linearen Anordnung gilt diese Forderung nur unter der Beschränkung, daß in jeder dazwischenliegenden Stadt nur ein Aufenthalt geplant ist, aber auch dann ist die Aufgabenstellung nicht eindeutig, weil es je nach Umlaufsinn stets zwei gleich lange Wege gibt.
[3] Den anfänglichen konstanten Netz-Input stellen wir aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dar.

Die Energiefunktion eines rekurrenten Netzes muß sich daher bei jedem Schritt verringern und soll (im binären Fall) nach endlich vielen Schritten ein Minimum und damit einen stabilen Zustand erreichen.

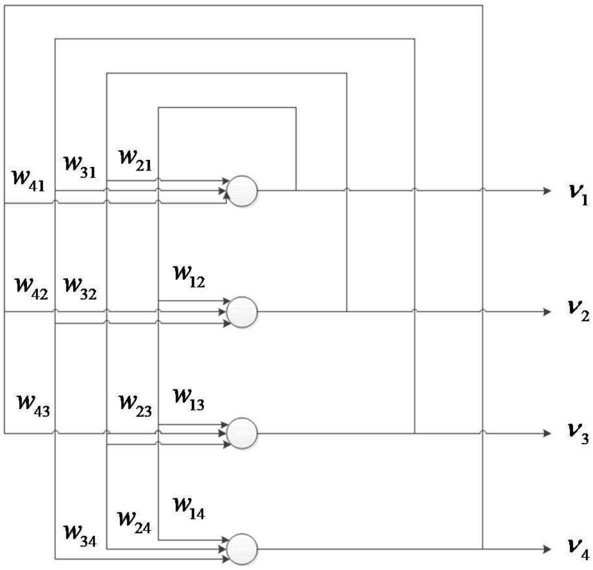

Abbildung 1. Hopfield-Netz mit 4 Neuronen (ohne Eingangsgrößen)

Da wir ein kontinuierliches, und kein diskretes Hopfield-Netz behandeln wollen, verwenden wir hierzu die hyperbolische Aktivierungsfunktion

$$v_{pi} = f\left(\mathrm{net}_{pi}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh \frac{\mathrm{net}_{pi}}{k}\right).$$

Dabei ist k ein Maß für die Steilheit des Übergangs und

$$\mathrm{net}_{pi} = \sum_{q \neq p} \sum_{j \neq i} w_{pi,qj} v_{qj}$$

die Netzeingabe. Die hyperbolische Aktivierungsfunktion approximiert den binären Grenzfall einer unendlich steilen Stufenfunktion:

$$v_{pi} = f\left(\mathrm{net}_{pi}\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad \mathrm{net}_{pi} > \theta_{pi}, \\ 0 & \text{falls} \quad \mathrm{net}_{pi} < \theta_{pi}, \\ v_{pi} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei θ_{pi} den Schwellenwert des Aktivierungspotentials angibt. Um der oben beschriebenen Problemstellung gerecht zu werden, sind die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen, die somit auch an die Energiefunktion E des Hopfield-Netzes gestellt werden müssen:

1. E darf nur minimal sein für Lösungen, die genau eine 1 in jeder Zeile und Spalte haben,
2. E muß für Lösungen mit kürzerer Weglänge geringer sein als für solche mit längerer Weglänge.

Diese beiden Forderungen werden von der allgemeinen Liapunov-Funktion erfüllt:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj} v_{pi} v_{qj} + \sum_p \sum_i \theta_{pi} v_{pi}.$$

Der zweidimensionalen Aufgabenstellung wird man am besten durch die Doppel-Indizierung *pi* gerecht. Aus Gründen, die erst später einzusehen sind, muß auch noch eine Konstante C hinzugefügt werden. Das dynamische Verhalten eines solchen Netzwerks ändert sich allerdings dadurch, daß die Gesamtenergie lediglich um einen konstanten Betrag erhöht wird, nicht. Somit lautet die modifizierte Liapunov-Funktion

$$\tilde{E} = -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj} v_{pi} v_{qj} + \sum_p \sum_i \theta_{pi} v_{pi} + C.$$

Mittels der Zerlegung eines jeden Gewichts in vier Komponenten, gekennzeichnet durch die Indizes $\alpha,$ $\beta,$ γ und $\delta,$ können wir jedes Gesamtgewicht als Summe von vier Einzelbeiträge berechnen:

$$w_{pi,qj} = w_{pi,qj}^{(\alpha)} + w_{pi,qj}^{(\beta)} + w_{pi,qj}^{(\gamma)} + w_{pi,qj}^{(\delta)},$$

wobei sich die gesamte Energie formal dann ebenfalls aus vier separaten Beiträgen zusammensetzt:

$$\tilde{E} = E^{(\alpha)} + E^{(\beta)} + E^{(\gamma)} + E^{(\delta)}.$$

Zunächst schreiben wir die allgemeine Energiefunktion nach Einsetzen der Teilgewichte wie folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{E} = &-\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\alpha)} v_{pi} v_{qj} - \frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\beta)} v_{pi} v_{qj} \\ &-\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\gamma)} v_{pi} v_{qj} + \sum_p \sum_i \theta_{pi} v_{pi} + C \\ &-\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\delta)} v_{pi} v_{qj},\end{aligned}$$

und zerlegen diese dann in die vier Komponenten

$$E^{(\alpha)} \equiv -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\alpha)} v_{pi} v_{qj},$$

$$E^{(\beta)} \equiv -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\beta)} v_{pi} v_{qj},$$

$$E^{(\gamma)} \equiv -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\gamma)} v_{pi} v_{qj} + \sum_p \sum_i \theta_{pi} v_{pi} + C,$$

$$E^{(\delta)} \equiv -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\delta)} v_{pi} v_{qj}.$$

Durch Koeffizientenvergleich der allgemeinen Energiefunktion unter den Bedingungen der Spezialfälle α, β, γ und δ bestimmen wir nachfolgend die jeweiligen Gewichtskomponenten. Die energetischen Spezialfälle sind in Tabelle 2 übersichtlich dargestellt.

$\tilde{E}$ $w_{pi,qj}$	$E^{(\alpha)}$ $j \neq i$	$E^{(\beta)}$ $j = i$	$E^{(\gamma)}$ $j = i$	$E^{(\delta)}$ $j = i \pm 1$
$p = q$	$\frac{\alpha}{2}\sum_p \sum_i \sum_{j \neq i} v_{pi} v_{pj}$	0	0	0
$p \neq q$	0	$\frac{\beta}{2}\sum_p \sum_i \sum_{q \neq p} v_{qi} v_{pi}$	0	0
$p = q$	0	0	$\frac{\gamma}{2}\left(\sum_p \sum_i v_{pi} - n\right)^2$	0
$p \neq q$	0	0	0	$\frac{\delta}{2}\sum_p \sum_q \sum_i d_{pq} v_{pi} \left(v_{q,i+1} + v_{q,i-1}\right)$

Tabelle 2. Übersicht über die Verhältnisse bei der Koeffizientenbestimmung

Für den Fall, daß die Bedingung $p = q$ und $j \neq i$ erfüllt ist, ist nur der erste Term mit α von Null verschieden, d.h.

$$\tilde{E} = E^{(\alpha)} \quad \text{für} \quad w_{pi,qj}^{(\alpha)} = -\alpha \delta_{pq} \left(1 - \delta_{ij}\right),$$

wobei δ_{pq} bzw. δ_{ij} jeweils das Kronecker-Symbol bezeichnen. Durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Energiefunktion erhalten wir den ersten Koeffizienten α aus der Relation

$$\tilde{E} = \frac{\alpha}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j \delta_{pq} \left(1 - \delta_{ij}\right) v_{pi} v_{qj} = \frac{\alpha}{2}\sum_p \sum_i \sum_{j \neq i} v_{pi} v_{pj}.$$

Für den Fall $p \neq q$ und $j = i$ ist nur der zweite Term mit β von Null verschieden, d.h. $\tilde{E} = E^{(\beta)}$, und nach Einsetzen von

$$w_{pi,qj}^{(\beta)} = -\beta \delta_{ij} \left(1 - \delta_{pq}\right)$$

folgt für den zweiten Koeffizienten β die Bestimmungsgleichung

$$\tilde{E} = \frac{\beta}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j \delta_{ij} \left(1 - \delta_{pq}\right) v_{pi} v_{qj} = \frac{\beta}{2}\sum_p \sum_i \sum_{q \neq p} v_{qi} v_{pi}.$$

Im Fall aller anderen Terme einer unzulässigen Tour[4] $p = q$ und $j = i$ soll gelten:

[4] Zwei verschiedene Städte zur gleichen Zeit bzw. ein und dieselbe Stadt zweimal

$$\tilde{E} = E^{(\gamma)} \quad \text{für} \quad w_{pi,qj}^{(\gamma)} = -\gamma .$$

Setzen wir den Schwellenwert $\theta_{pi} = -\gamma n$ und den konstanten Term $C = (\gamma/2)n^2$ in die Gleichung

$$\tilde{E} = -\frac{1}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j w_{pi,qj}^{(\gamma)} v_{pi} v_{qj} + \sum_p \sum_i \theta_{pi} v_{pi} + C$$

ein, so folgt die dritte Konstante γ aus

$$\tilde{E} = \frac{\gamma}{2}\left\{\left(\sum_p \sum_i v_{pi}\right)^2 - 2n\sum_p \sum_i v_{pi} + n^2\right\} = \frac{\gamma}{2}\left(\sum_p \sum_i v_{pi} - n\right)^2 .$$

Für $p \neq q,\ j = i+1$ und $j = i-1$ gilt der vierte Term der Energiegleichung, d.h. im Falle

$$\tilde{E} = E^{(\delta)} \quad \text{für} \quad w_{pi,qj}^{(\delta)} = -\delta d_{pq}\left(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}\right)$$

erhalten wir die vierte und letzte Konstante δ aus

$$\tilde{E} = \frac{\delta}{2}\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j d_{pq} v_{pi}\left(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}\right) v_{qj} = \frac{\delta}{2}\sum_p \sum_i \sum_q d_{pq} v_{pi}\left(v_{q,i+1} + v_{q,i-1}\right).$$

Dabei ist dieser Term der eigentliche Entfernungsterm mit der Distanz d_{pq} zwischen den Städten p und q. Zusätzlich hat jedes Neuron ein Gewicht für den Schwellenwert θ_{pi} mit dem Wert $-\gamma n$.

Der erste Term ist nur dann Null, wenn jede Zeile in Tabelle 1 nur eine einzige 1 enthält, d.h. jede Stadt p nur einmal besucht wird. Der zweite Term verschwindet nur dann, wenn jede Spalte nur eine 1 enthält, d.h. nur eine Stadt an einer Position i der Tour steht, und nicht mehrere Städte zugleich besucht werden. Der dritte Term ist genau dann Null, wenn es genau n Einsen in der Matrix gibt, d.h. wenn jede Stadt und jede Position auch mindestens einmal vorkommen. Der vierte Term gibt die Länge einer gültigen Tour an. Dabei werden die Indizes modulo n berechnet, d.h. $v_{q,n+j} = v_{q,j}$. Der Faktor ½ ist dadurch gerechtfertigt, daß jede Verbindung doppelt gezählt wird (von p nach q und von q nach p).

Insgesamt gilt also für die Berechnung eines Gewichts $w_{pi,qj}$ die Formel

$$w_{pi,qj} = -\alpha\delta_{pq}\left(1-\delta_{ij}\right) - \beta\delta_{ij}\left(1-\delta_{pq}\right) - \gamma - \delta d_{pq}\left(\delta_{j,i+1} + \delta_{j,i-1}\right).$$

Das Gewicht kann also betragsmäßig nie kleiner werden als γ. Setzen wir das Gewicht in die Liapunov-Funktion ein, d.h.

$$\tilde{E} = \frac{1}{2}\sum_p\sum_q\sum_i\sum_j\left(\alpha\delta_{pq}\left(1-\delta_{ij}\right)+\beta\delta_{ij}\left(1-\delta_{pq}\right)+\delta d_{pq}\left(\delta_{j,i+1}+\delta_{j,i-1}\right)\right)v_{pi}v_{qj}$$
$$+\frac{\gamma}{2}\left(\sum_p\sum_i v_{pi}\sum_q\sum_j v_{qj}-2n\sum_p\sum_i v_{pi}+n^2\right),$$

erhalten wir nach Zusammenfassung aller Terme die endgültige Energiefunktion in der bekannten Form

$$\tilde{E} = \frac{\alpha}{2}\sum_p\sum_i\sum_{j\neq i} v_{pi}v_{pj}+\frac{\beta}{2}\sum_p\sum_i\sum_{q\neq p} v_{qi}v_{pi}+\frac{\gamma}{2}\left(\sum_p\sum_i v_{pi}-n\right)^2$$
$$+\frac{\delta}{2}\sum_p\sum_i\sum_q d_{pq}v_{pi}\left(v_{q,i+1}+v_{q,i-1}\right).$$

Man beachte, daß die Energie nur dann minimal wird, wenn der Netzinput hinreichend groß ist bzw. die Konstante k entsprechend klein gewählt wird, d.h. im Grenzfall

$$v_{pi} = \lim_{k\to 0} f\left(\mathrm{net}_{pi}\right) = 1.$$

Denn nur dann gilt

$$\lim_{k\to 0}\sum_p\sum_i v_{pi} = n.$$

Das Traveling Salesman-Problem kann erfolgreich auf die Wegpunkt-Navigation in der autonomen Luftfahrt angewandt werden, wenn es darum geht, eine Reihe von Wegpunkten unter dem Aspekt der Kostenminimierung anzufliegen.

