

# Mathematikaufgabe 135

---

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Erläutern Sie, welche Veränderungen am Rentensystem vorgenommen werden müssen, damit es auch in Zukunft noch funktionieren kann.

**Lösung:** Sei  $A < 0$  die Geldmenge der jährlichen Rentenausgaben und  $E > 0$  die entsprechende Geldmenge der jährlichen Beitragszahlungen. Am Ende jedes Wirtschaftsjahres wird Kassensturz gemacht, so daß sich Einnahmen und Ausgaben zu null ergänzen:

$$A + E = 0.$$

Steigen nun aufgrund der demographischen Entwicklung die Rentenausgaben exponentiell an,

$$A = A_0 e^{kt},$$

wobei  $k$  die Zuwachsrate ist, müssen die Einnahmen

$$E = -A = -A_0 e^{kt} \equiv E_0 e^{kt}$$

entsprechend nachgezogen werden. Falls sich am Ende eines Wirtschaftsjahres herausstellen sollte, daß in die Rentenkasse weniger Geld eingezahlt worden ist, als ihr im nächsten Jahr entnommen werden muß, d.h. daß die Ausgaben die Einnahmen übersteigen,

$$|A_0| > |E_0|,$$

so kann Gleichheit hergestellt werden, indem ein Zuwachs  $\Delta k > 0$  eingefordert wird:

$$|A_0| = |E_0| e^{\Delta kt}.$$

Über den Abrechnungszeitraum<sup>1</sup>  $T$  muß also gelten:

$$\Delta k = \frac{1}{T} \ln \frac{|A_0|}{|E_0|}.$$

Im Idealfall sollte

$$\Delta k = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|A_0|}{|E_0|} = 1$$

sein. Dabei ergibt sich die absolute Beitragszahlung  $|E_0|$  aus der Zahl der Beitragszahler  $N_e$  und dem durchschnittlichen Rentenbeitrag pro Person  $n_e$  gemäß

$$|E_0| = N_e n_e$$

---

<sup>1</sup> In der Regel ein Jahr

## Mathematikaufgabe 135

---

und die absolute Rentenauszahlung  $|A_0|$  aus der Zahl der Rentner  $N_a$  und der durchschnittlichen Rentenhöhe pro Person  $n_a$  analog zu

$$|A_0| = N_a n_a.$$

In jedem Fall gilt

$$\frac{|A_0|}{|E_0|} = \frac{N_a n_a}{N_e n_e} \quad \text{bzw.} \quad \frac{n_e}{n_a} = \frac{N_a}{N_e},$$

d.h. das Verhältnis des durchschnittlichen Rentenbeitrags zur durchschnittlichen Rentenhöhe bemißt sich am Verhältnis der Rentner zu den Beitragszahlern. Wenn dieses Verhältnis ungünstig wird, also zunimmt, gibt es drei verschiedene Möglichkeiten: entweder man kürzt die Rentenhöhe oder man erhöht die Beitragszahlungen oder man macht beides. Es gibt ebenfalls die Möglichkeit, die Zahl der Rentner zu erniedrigen, indem man das Renteneintrittsalter anhebt, oder die Zahl der Beitragszahler entsprechend zu erhöhen, indem man möglichst alle in Brot und Arbeit bringt.<sup>2</sup> Dabei ist die Idee des Rentensystems gemäß Generationenvertrag ein gleichbleibendes Verhältnis aus Beitragszahlern und Rentnern, die sich zu 100 Prozent ergänzen,<sup>3</sup>

$$\frac{N_a}{N_0} + \frac{N_e}{N_0} = 1.$$

Absolut betrachtet muß die Summe aus Beitragszahlern und Rentnern  $N_0$  wegen der demographischen Entwicklung allerdings ansteigen,<sup>4</sup> d.h.

$$N_a + N_e = N_0.$$

Eliminieren wir nun mittels voriger Gleichung die Zahl der Einzahler, d.h.

$$\frac{n_e}{n_a} = \frac{N_a}{N_0 - N_a} = \frac{N_a}{N_0} \frac{1}{1 - \frac{N_a}{N_0}},$$

und fordern, daß einer maximal nur das ausbezahlt bekommen kann, was ein anderer stellvertretend für ihn eingezahlt hat,<sup>5</sup> d.h.  $n_e/n_a = 1$ , dann muß die Gesamtbevölkerung stets doppelt so groß sein wie die Zahl der Rentner und mindestens eine Hälfte muß arbeiten:

$$N_0 = 2N_a \quad \text{bzw.} \quad N_e = N_a.$$

---

<sup>2</sup> Idealerweise auch Jugendliche und Langzeitarbeitslose

<sup>3</sup> Einem solchen Modell liegt unbegrenztes Wachstum zugrunde

<sup>4</sup> Was sie aber in der Realität nicht tut, da die Geburtsraten unter den Sterberaten liegen

<sup>5</sup> In diese Überlegung ist die Geldentwertung bereits eingeschlossen

## Mathematikaufgabe 135

---

Mit anderen Worten: Um das Rentensystem stabil zu halten, müssen im Mittel genauso viele einer steuerpflichtigen Beschäftigung nachgehen, wie es Rentner im Lande gibt. Das kann zur Konsequenz haben, daß die Ausbildungszeiten stark verkürzt werden müssen, damit der Eintrittszeitpunkt ins berufsfähige Alter vorverlegt werden kann. Es ist undenkbar, daß ein nicht unerheblicher Teil der Bevölkerung bis in die Mitte seines Lebens einer steuerfreien Ausbildung nachgeht sprich studiert, während ein anderer bis ans Lebensende schuftet muß oder alternativlos verhungert.