Aufgabe: Jemand sitzt im Brennpunkt eines ellipsenförmigen Landes und will zu Fuß flüchten. Die Wahrscheinlichkeit, Opfer von Kriegshandlungen zu werden, sei überall im Land gleich groß. Wohin wendet er sich, um so schnell wie möglich außer Landes zu kommen? Was steht zu befürchten, wenn er einen anderen Weg einschlägt?

Lösung: Betrachten wir zur Veranschaulichung die Ellipse in Abb. 1.

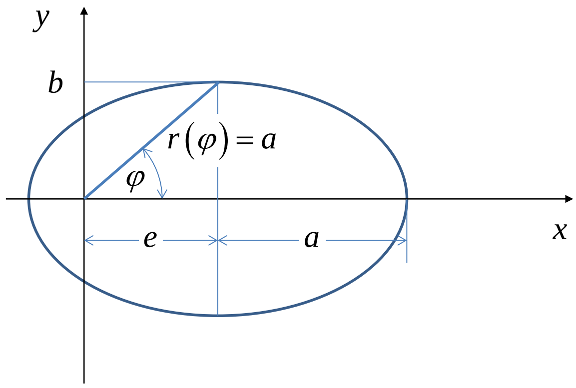

Abbildung 1. Ellipse mit Koordinatennullpunkt im linken Brennpunkt

Um möglichst schnell außer Landes zu kommen, muß der Flüchtling den Weg wählen, der am kürzesten ist. Wäre das Land kreisförmig und säße er genau im Mittelpunkt, könnte er sich für irgendeinen Weg entscheiden, weil alle Wege zur Grenze gleich lang sind. Im Brennpunkt einer Ellipse hingegen gibt es einen kürzesten und einen weitesten Weg, die es nachfolgend herauszufinden gilt. Die Gleichung einer Ellipse, deren linker Brennpunkt mit dem Koordinatennullpunkt zusammenfällt, lautet:

$$r(\varphi)=\frac{b^2}{a-e\cos\varphi},$$

wobei $e=\sqrt{a^2-b^2}$. Eigentlich kann man die Lösung auch erraten, wir wollen sie aber nachfolgend exakt mathematisch herleiten. Der in Abb. 1 dargestellte Radiusvektor führt zu dem auf der y-Achse entferntesten Punkt im Abstand b. Dieser entspricht dem Winkel

$$\varphi_e=\arccos\frac{e}{r(\varphi_e)} \quad \text{mit} \quad r(\varphi_e)=\frac{b^2}{a-e\cos\varphi_e}=\frac{ab^2}{a^2-e^2}=a.$$

Um den maximalen und minimalen Abstand zum Rand der Ellipse zu bestimmen, müssen wir eine Extremwerteaufgabe lösen. Dazu differenzieren wir die Polarkoordinatendarstellung der Ellipse nach dem Winkel φ,

$$r'(\varphi)=\frac{eb^2\sin\varphi}{(a-e\cos\varphi)^2},$$

und setzen diesen Ausdruck gleich null. Der Sinus verschwindet für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi$. Um die Art des Extremwerts zu bestimmen, benötigen wir noch die zweite Ableitung des Radiusvektors:

$$r''(\varphi)=\frac{2e^2b^2\sin^2\varphi}{(a-e\cos\varphi)^3}+\frac{eb^2\cos\varphi}{(a-e\cos\varphi)^2}=-eb^2\,\frac{-e\sin^2\varphi+a\cos\varphi-e}{(a-e\cos\varphi)^3}.$$

An der Stelle $\varphi=0$ gilt

$$r''(0)=-\frac{eb^2}{(a-e)^2}<0,$$

d.h. dort liegt ein relatives Maximum vor. An der Stelle $\varphi=\pi$ hingegen ist

$$r''(\pi)=\frac{eb^2}{(a+e)^2}>0,$$

dort haben wir also ein relatives Minimum vorliegen. Mithin ergeben sich minimale und maximale Entfernung zur Grenze des elliptischen Gebietes aus den Gleichungen

$$r_{\min}=r(\pi)=\frac{b^2}{a+e}\quad\text{und}\quad r_{\max}=r(0)=\frac{b^2}{a-e}.$$

Der logische Fluchtweg ist demnach der kürzeste und führt in Richtung der negativen x-Achse:

$$r_{\min}=\frac{b^2}{a+e}=\frac{b^2}{a^2-e^2}(a-e)=a-e.$$

Wird dieser nicht eingehalten, so steht zu befürchten, daß es sich um gar keine Flucht handelt, sondern um ein gezieltes Verlassen des Landes aus anderen Gründen.

