Aufgabe: Berechnen Sie Oberfläche und Flächenschwerpunkt einer liegenden 16tel-Sphäre.

Lösung: Für die liegende 16tel-Sphäre (siehe Abb. 1) benötigen wir die Orthodromengleichung in der Form

$$\theta(\lambda) = \arcsin \frac{\cot\theta_0}{\sqrt{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}} = \arctan \frac{\cot\theta_0}{\left|\sin(\lambda-\lambda_0)\right|},$$

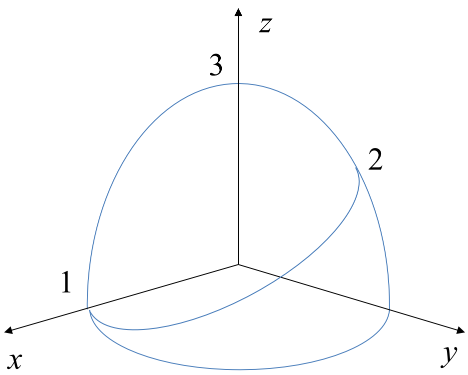
wobei

$$\theta_0 = \operatorname{arccot} \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}$$

der Winkel des Normalenvektors

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\lambda_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1\sin\lambda_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1\cos\lambda_2 - \cos\theta_2\sin\theta_1\cos\lambda_1 \\ \sin\theta_2\sin\theta_1\sin(\lambda_2-\lambda_1) \end{pmatrix}$$

senkrecht zur Ebene, in der die Orthodrome liegt, mit der z-Achse ist. λ_0 gibt den Schnittpunkt der Orthodrome mit dem Äquator an.



$S = \pi/4 \quad \lambda_s = 30{,}36° \quad \varphi_s = 54{,}59°$

Abbildung 1. Die Punkte 1-2-3 schließen eine 16tel-Sphäre ein

Den auf den Kugelradius normierten Schwerpunkt berechnen wir gemäß der kartesischen Definition einer massebeschichteten Sphäre:

$$\frac{x_s}{R} = \frac{R^2}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} \sin^2\theta \, d\theta \cos\lambda \, d\lambda,$$

$$\frac{y_s}{R} = \frac{R^2}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} \sin^2\theta \, d\theta \sin\lambda \, d\lambda,$$

wobei die Fläche S gegeben ist durch[1]

$$S = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} \sin\theta d\theta d\lambda.$$

Im Intervall $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] = [0, \pi/2]$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi/2]$ gilt für den Normalenvektor vereinfachend

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ -\cos\theta_2 \sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Mit einem Polarwinkel von $\theta_1 = \pi/2$ wie in der Abbildung dargestellt ist

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

und $\cot\theta_0 = \tan\theta_2$. Im Falle $\theta_2 = \pi/4$ ist $\cot\theta_0 = 1$. Wegen $\lambda_0 = 0$ vereinfacht sich die Orthodromengleichung damit wie folgt:

$$\theta(\lambda) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2\lambda + 1}} = \arctan\frac{1}{\sin\lambda}.$$

Mittels der entsprechenden Integrationsgrenzen erhalten wir die Oberfläche

$$S = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} \sin\theta d\theta d\lambda = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\theta\right]_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} d\lambda = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin\lambda}{\sqrt{\sin^2\lambda + 1}}\right) d\lambda$$

$$= \frac{\pi}{2} R^2 - R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\lambda d\lambda}{\sqrt{\sin^2\lambda + 1}} = \frac{\pi}{2} R^2 - R^2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\pi}{2} R^2 - R^2 \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1$$

und den erwarteten Zahlenwert

$$S = \frac{\pi}{2} R^2 - R^2 \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} R^2.$$

Um den Schwerpunkt zu ermitteln, muß zunächst das Integral

$$\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta}\right]_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}} = \frac{1}{2}\left[\arctan\frac{1}{\sin\lambda} - \frac{\sin\lambda}{1 + \sin^2\lambda}\right]$$

[1] Eigentlich muß dieses Integral nicht explizit ausgeführt werden, da sein Wert aus Symmetrieüberlegungen folgt.

in die folgende Gleichung eingesetzt werden. Damit ergibt sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan\frac{1}{\sin\lambda}\cos\lambda d\lambda-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda}{1+\sin^2\lambda}\cos\lambda d\lambda$$

bzw.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{\arctan y}{y^2}dy-\frac{1}{4}\int_1^2\frac{dz}{z}$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{y}\arctan y-\frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{y^2}\right]_1^\infty-\frac{1}{4}\ln 2=\frac{\pi}{8}.$$

Ferner benötigen wir das Integral für die *y*-Koordinate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan\frac{1}{\sin\lambda}\sin\lambda d\lambda-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda}{1+\sin^2\lambda}\sin\lambda d\lambda.$$

Mittels partieller Integration können wir das erste der beiden Teilintegrale schnell lösen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan\frac{1}{\sin\lambda}\sin\lambda d\lambda=\left[-\cos\lambda\arctan\frac{1}{\sin\lambda}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda+1}d\lambda.$$

Damit läßt sich auch der wesentlich einfachere Ausdruck

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda=\frac{1}{2}\left[-\cos\lambda\arctan\frac{1}{\sin\lambda}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda+1}d\lambda-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\lambda}{1+\sin^2\lambda}d\lambda$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2\lambda+1}d\lambda=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\tan\lambda\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{4}$$

leicht berechnen. Hieraus folgen dann die beiden Hilfsgrößen

$$U_x\equiv\frac{S}{R^2}\frac{x_s}{R}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda=\frac{\pi}{8}=0,3927,$$
$$U_y\equiv\frac{S}{R^2}\frac{y_s}{R}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sin\lambda}}\sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{4}=0,2300$$

und schließlich der Schwerpunkt, da die Integrale längs der beiden Meridiane keinen Beitrag leisten.[2] Mit $S = \pi R^2/4$ lauten die kartesischen Koordinaten demnach wie folgt:

$$x_s = \frac{R^3}{S}\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}R, \quad y_s = \frac{R^3}{S}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)R,$$
$$z_s = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{3}{4}}R, \quad \rho_s = \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{2}}R.$$

Für die Einheitssphäre mit $R = 1$ ergibt sich schließlich

$$x_s = 0,5, \quad y_s = 0,2929, \quad z_s = 0,8150, \quad \rho_s = 0,5795,$$

und aus den Definitionen

$$\lambda_s = \arctan\frac{y_s}{x_s}, \quad \varphi_s = \arctan\frac{z_s}{\rho_s}$$

folgen wie in der Abbildung angegeben die Winkel in Länge und Breite

$$\lambda_s = \arctan\left(2 - \sqrt{2}\right) = 30,3612°, \quad \varphi_s = \arctan\frac{\sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{\sqrt{7 - 4\sqrt{2}}} = 54,5867°.$$

[2] Ihr Normalenvektor liegt waagrecht in der *x*-*y*-Ebene.

