Aufgabe: Berechnen Sie die Genauigkeit einer Triangulationsmessung und diskutieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

Jede Gerade in der Ebene läßt sich in Parallelkoordinaten in der Form

$$ax + by + c = 0$$

darstellen. Die Hessesche Normalform der Geradengleichung ist

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,.$$

Dabei ist p der Abstand vom Koordinatenursprung und α der Winkel zwischen der Normalen der Geraden und der x-Achse. Die Koordinaten des Schnittpunktes (x_0, y_0) zweier Geraden, die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben sind, berechnen sich zu

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y_0 &= \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen gemäß Hessescher Normalform

$$\begin{aligned} a &= \cos\alpha \\ b &= \sin\alpha \\ c &= -p \end{aligned}$$

für beide Geraden stellt sich der Schnittpunkt wie folgt dar:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{p_1 \sin\alpha_2 - p_2 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ y_0 &= \frac{p_2 \cos\alpha_1 - p_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{aligned}$$

Die Abstände der beiden Geraden vom Koordinatenursprung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1 &= x_0 \cos\alpha_1 + y_0 \sin\alpha_1 \\ p_2 &= x_0 \cos\alpha_2 + y_0 \sin\alpha_2 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind eine Funktion der beiden Winkel α_1 und α_2 sowie der beiden Abstände p_1 und p_2. Um die Fehlerquadrate nach Gauß zu summieren, berechnen wir das totale Differential

$$
\begin{aligned}
\Delta x_0 &= \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial x_0}{\partial p_1}\Delta p_1 + \frac{\partial x_0}{\partial p_2}\Delta p_2 \\
\Delta y_0 &= \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial y_0}{\partial p_1}\Delta p_1 + \frac{\partial y_0}{\partial p_2}\Delta p_2
\end{aligned}
$$

und addieren die einzelnen Terme quadratisch, i.e.

$$
\begin{aligned}
\Delta x_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2 \Delta\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2 \Delta\alpha_2^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2 \Delta p_1^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2 \Delta p_2^2} \\
\Delta y_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\right)^2 \Delta\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\right)^2 \Delta\alpha_2^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2 \Delta p_1^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2 \Delta p_2^2}
\end{aligned}
$$

Die partiellen Ableitung lauten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} &= x_0 \cot(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{p_2 \cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} &\qquad \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} &= y_0 \cot(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{p_2 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\
\frac{\partial x_0}{\partial p_1} &= \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} & \frac{\partial y_0}{\partial p_1} &= -\frac{\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \\
\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2} &= \frac{p_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} - x_0 \cot(\alpha_2 - \alpha_1) & \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2} &= \frac{p_1 \sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} - y_0 \cot(\alpha_2 - \alpha_1) \\
\frac{\partial x_0}{\partial p_2} &= -\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} & \frac{\partial y_0}{\partial p_2} &= \frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}
\end{aligned}
$$

Im weiteren nehmen wir gleiche Positions- und Winkelmeßgenauigkeit an, d.h.

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \equiv \Delta p \;\text{ und }\; \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 \equiv \Delta\alpha .$$

Damit können wir einige Terme zusammenfassen, und zwar

$$
\begin{aligned}
\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2 = &\left[2x_0^2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1) + p_1^2 \cos^2\alpha_2 + p_2^2 \cos^2\alpha_1\right. \\
&\left. - 2x_0(p_1 \cos\alpha_2 + p_2 \cos\alpha_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\right]\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)}.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Substitutionen

$$p_1 \cos\alpha_2 + p_2 \cos\alpha_1 = x_0[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)] + y_0 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$$

und

$$p_1^2\cos^2\alpha_2+p_2^2\cos^2\alpha_1=\frac{1}{2}x_0^2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]^2+\frac{1}{2}y_0^2\left[\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$
$$+x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$

formen wir wie folgt um:

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left\{\frac{1}{2}x_0^2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]^2\right.$$
$$-x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)-\cos(\alpha_2-\alpha_1)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2}y_0^2\left[\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right]\right\}\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Selbiges können wir auch mit den anderen partiellen Ableitungen tun:

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Mit der y-Koordinate verfahren wir analog. Es gilt

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left[2y_0^2\cos^2(\alpha_2-\alpha_1)+p_1^2\sin^2\alpha_2+p_2^2\sin^2\alpha_1\right.$$
$$\left.-2y_0(p_1\sin\alpha_2+p_2\sin\alpha_1)\cos(\alpha_2-\alpha_1)\right]\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Mit den Substitutionen

$$p_1\sin\alpha_2+p_2\sin\alpha_1=x_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)+y_0\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$

und

$$p_1^2\sin^2\alpha_2+p_2^2\sin^2\alpha_1=\frac{1}{2}x_0^2\left[\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right]+\frac{1}{2}y_0^2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]^2$$
$$+x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$

erhalten wir für die Winkelableitungen

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left\{\frac{1}{2}x_0^2\left(\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right)\right.$$
$$-x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2}y_0^2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]^2\right\}\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)},$$

und für die Abstandsableitungen folgt:

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Nunmehr drehen wir unser Koordinatensystem ohne Beschränkung der Allgemeinheit so, daß $y_0=0$ und $\alpha_2=-\alpha_1$. Damit ergibt sich für die Fehlerbeiträge

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\frac{1}{2}x_0^2\frac{(1-\cos(\alpha_2-\alpha_1))^2\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)},$$

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2$$

bzw.

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1}{2}\Delta p^2 \qquad |\alpha_1-\alpha_2|<<1.$$

Die Fehlerbeiträge der y-Koordinate erhalten wir zu

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2$$

und

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Letzterer wird minimal für $|\alpha_1-\alpha_2|=\pi$.

Die Fehler der Komponenten vereinfachen sich damit wir folgt:

$$\Delta x_0=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2\frac{(1-\cos(\alpha_2-\alpha_1))^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}+\frac{1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2},$$
$$\Delta y_0=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2+\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2}.$$

Ausgehend von der Anordnung in Abbildung 1 können wir aus diesen Beziehungen unter der Annahme repräsentativer Werte für den Schnittpunkt x_0 und die absoluten Fehler $\Delta\alpha$ und Δp die Meßunsicherheiten einer Triangulationsmessung in x- und y-Richtung bestimmen.

Das Ergebnis ist als Funktion des Triangulationswinkels in Abbildung 2 und Abbildung 3 graphisch dargestellt. Dabei wurde eine absolute Winkelmeßgenauigkeit $\Delta\alpha$ von 1 µrad angenommen und eine absolute Positionsgenauigkeit Δp von 1 m. Der Abstand vom Koordinatenursprung x_0 beträgt in dem gewählten Beispiel 500 km. Die Grafiken geben den absoluten Meßfehler in Meter an.

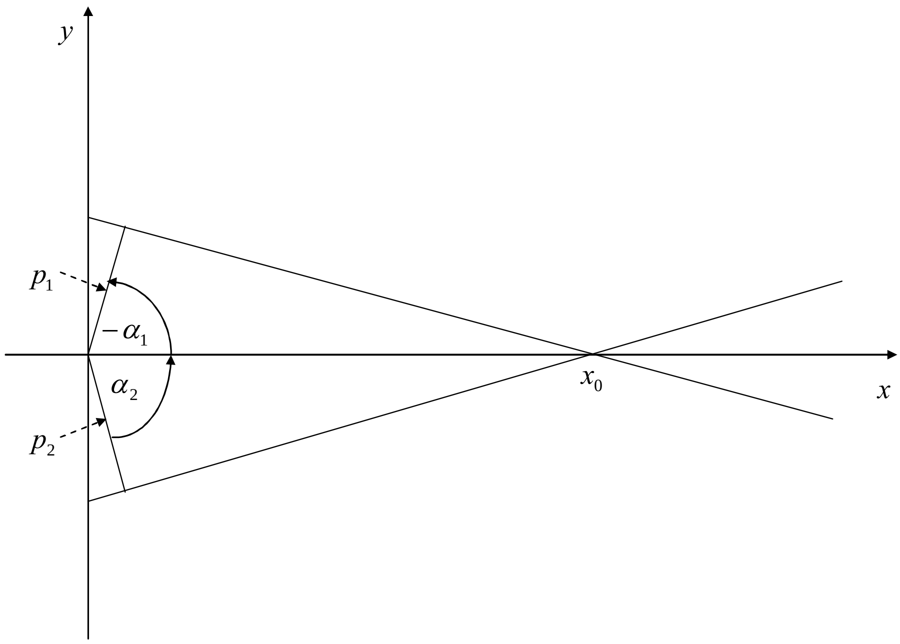

Abbildung 1. Triangulationsgeometrie

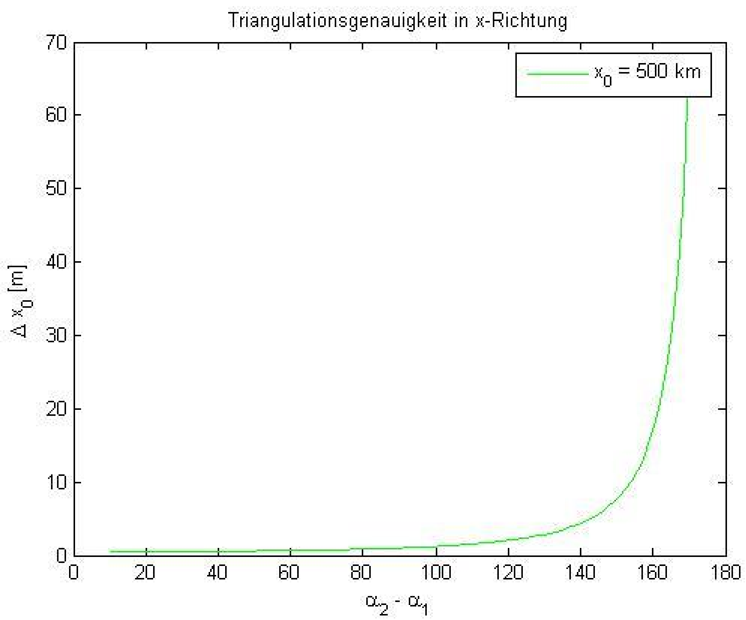

Abbildung 2. Triangulationsgenauigkeit in x-Richtung

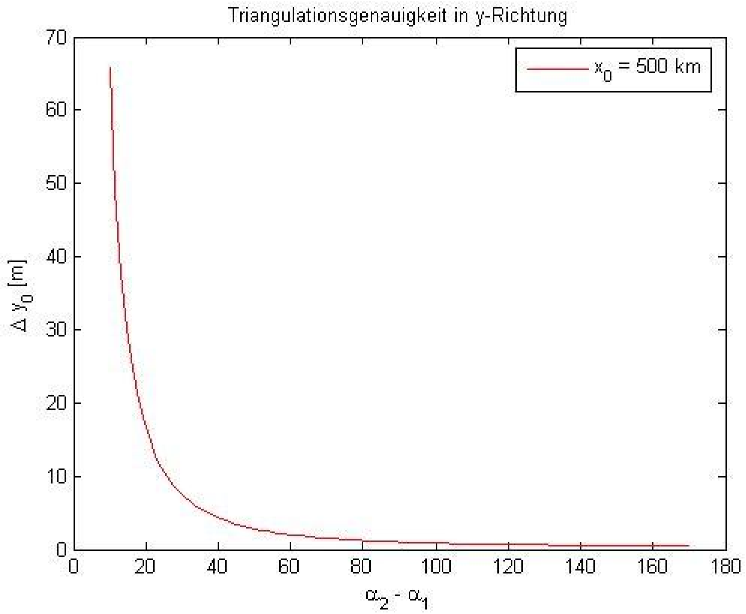

Abbildung 3. Triangulationsgenauigkeit in y-Richtung

Um den radialen Meßfehler der Triangulation zu bestimmen, leiten wir den radialen Abstand des Schnittpunktes

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

nach den beiden Komponenten ab. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{r_0},$$
$$\frac{\partial r_0}{\partial y_0} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{r_0}.$$

Das totale Differential der Radialkomponente ist gegeben durch

$$\Delta r_0 = \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \Delta y_0,$$

womit wir für die Meßunsicherheit nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung den Ausdruck

$$\Delta r_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial r_0}{\partial x_0}\right)^2 \Delta x_0^2 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial y_0}\right)^2 \Delta y_0^2} = \frac{1}{r_0}\sqrt{x_0^2 \Delta x_0^2 + y_0^2 \Delta y_0^2}$$

erhalten. Im Falle $y_0 = 0$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\Delta r_0 = \Delta x_0.$$

In Abbildung 4 haben wir den maximalen möglichen Fehler $\Delta r_{\max} \equiv \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}$ graphisch dargestellt.

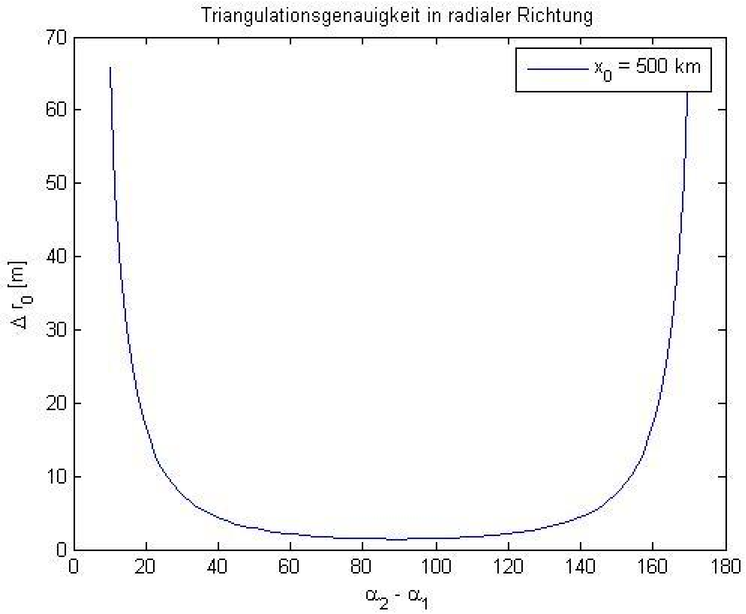

Abbildung 4. Triangulationsgenauigkeit in radialer Richtung

Man erkennt, daß das Optimum der Triangulation bei 90° liegt, denn dort ist der maximal mögliche Fehler minimal. Messungen mit hoher Genauigkeit sind innerhalb von $90° \pm 30°$ möglich. Bei 90° beträgt in dem gewählten Beispiel die Meßgenauigkeit 1,008 m, liegt also sehr nahe an der angenommenen Positionsgenauigkeit von 1 m.