**Aufgabe:** Berechnen Sie die Genauigkeit einer Triangulationsmessung und diskutieren Sie das Ergebnis.

**Lösung:** Jede Gerade in der Ebene läßt sich in Parallelkoordinaten in der Form

$$ax + by + c = 0$$

darstellen. Die Hessesche Normalform der Geradengleichung ist

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Dabei ist $p$ der Abstand vom Koordinatenursprung und $\alpha$ der Winkel zwischen der Normalen der Geraden und der $x$-Achse. Die Koordinaten des Schnittpunktes $(x_0, y_0)$ zweier Geraden, die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben sind, berechnen sich zu

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \\ y_0 &= \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen gemäß Hessescher Normalform

$$\begin{aligned} a &= \cos\alpha, \\ b &= \sin\alpha, \\ c &= -p \end{aligned}$$

für beide Geraden stellt sich der Schnittpunkt wie folgt dar:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{p_1 \sin\alpha_2 - p_2 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ y_0 &= \frac{p_2 \cos\alpha_1 - p_1 \cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned}$$

Die Abstände der beiden Geraden vom Koordinatenursprung sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1 &= x_0 \cos\alpha_1 + y_0 \sin\alpha_1, \\ p_2 &= x_0 \cos\alpha_2 + y_0 \sin\alpha_2. \end{aligned}$$

 

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind eine Funktion der beiden Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ sowie der beiden Abstände $p_1$ und $p_2$. Um die Fehlerquadrate nach Gauß zu summieren, berechnen wir das totale Differential

$$\Delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial x_0}{\partial p_1}\Delta p_1 + \frac{\partial x_0}{\partial p_2}\Delta p_2,$$
$$\Delta y_0 = \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 + \frac{\partial y_0}{\partial p_1}\Delta p_1 + \frac{\partial y_0}{\partial p_2}\Delta p_2$$

und addieren die einzelnen Terme quadratisch, i.e.

$$\Delta x_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2\Delta\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\Delta\alpha_2^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2\Delta p_1^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\Delta p_2^2},$$
$$\Delta y_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\right)^2\Delta\alpha_1^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\Delta\alpha_2^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2\Delta p_1^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2\Delta p_2^2}.$$

Die partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1} = x_0 \cot(\alpha_2-\alpha_1) - \frac{p_2\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1} = y_0 \cot(\alpha_2-\alpha_1) - \frac{p_2\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)},$$
$$\frac{\partial x_0}{\partial p_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial p_1} = -\frac{\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)},$$
$$\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2} = \frac{p_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} - x_0\cot(\alpha_2-\alpha_1), \qquad \frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2} = \frac{p_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)} - y_0\cot(\alpha_2-\alpha_1),$$
$$\frac{\partial x_0}{\partial p_2} = -\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}, \qquad \frac{\partial y_0}{\partial p_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Im weiteren nehmen wir gleiche Positions- und Winkelmeßgenauigkeit an, d.h.

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 \equiv \Delta p \text{ und } \Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 \equiv \Delta\alpha.$$

Damit können wir einige Terme zusammenfassen, und zwar

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2 = \Big[2x_0^2\cos^2(\alpha_2-\alpha_1) + p_1^2\cos^2\alpha_2 + p_2^2\cos^2\alpha_1$$
$$-2x_0(p_1\cos\alpha_2 + p_2\cos\alpha_1)\cos(\alpha_2-\alpha_1)\Big]\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Mit Hilfe der Substitutionen

$$p_1\cos\alpha_2 + p_2\cos\alpha_1 = x_0[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + \cos(\alpha_2-\alpha_1)] + y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

und

 

$$p_1^2\cos^2\alpha_2+p_2^2\cos^2\alpha_1=\frac{1}{2}x_0^2\left[\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}y_0^2\left[\sin^2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\sin^2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]$$
$$+x_0y_0\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left[\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]$$

formen wir wie folgt um:

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left\{\frac{1}{2}x_0^2\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]^2\right.$$
$$-x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)\left[\cos(\alpha_1+\alpha_2)-\cos(\alpha_2-\alpha_1)\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2}y_0^2\left[\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right]\right\}\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Selbiges können wir auch mit den anderen partiellen Ableitungen tun:

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Mit der $y$-Koordinate verfahren wir analog. Es gilt

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial\alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left[2y_0^2\cos^2(\alpha_2-\alpha_1)+p_1^2\sin^2\alpha_2+p_2^2\sin^2\alpha_1\right.$$
$$\left.-2y_0(p_1\sin\alpha_2+p_2\sin\alpha_1)\cos(\alpha_2-\alpha_1)\right]\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Mit den Substitutionen

$$p_1\sin\alpha_2+p_2\sin\alpha_1=x_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)+y_0\left[\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right]$$

und

$$p_1^2\sin^2\alpha_2+p_2^2\sin^2\alpha_1=\frac{1}{2}x_0^2\left[\sin^2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)+\sin^2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}y_0^2\left[\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)-\cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]^2$$
$$+x_0y_0\sin\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\left[\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)-\cos\left(\alpha_1+\alpha_2\right)\right]$$

erhalten wir für die Winkelableitungen

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\left\{\frac{1}{2}x_0^2\left(\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)\right)\right.$$
$$-x_0y_0\sin(\alpha_1+\alpha_2)[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)]$$
$$\left.+\frac{1}{2}y_0^2[\cos(\alpha_2-\alpha_1)+\cos(\alpha_1+\alpha_2)]^2\right\}\frac{\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)},$$

und für die Abstandsableitungen folgt:

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Nunmehr drehen wir unser Koordinatensystem ohne Beschränkung der Allgemeinheit so, daß $y_0=0$ und $\alpha_2=-\alpha_1$. Damit ergibt sich für die Fehlerbeiträge

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\frac{1}{2}x_0^2\frac{(1-\cos(\alpha_2-\alpha_1))^2\Delta\alpha^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)},$$

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2$$

bzw.

$$\left[\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial x_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1}{2}\Delta p^2\quad\text{mit}\quad|\alpha_1-\alpha_2|\ll 1.$$

Die Fehlerbeiträge der *y*-Koordinate erhalten wir zu

$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial \alpha_2}\right)^2\right]\Delta\alpha^2=\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2,$$
$$\left[\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial p_2}\right)^2\right]\Delta p^2=\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2.$$

Letzterer wird minimal für $|\alpha_1-\alpha_2|=\pi$. Die Fehler der Komponenten vereinfachen sich damit wie folgt:

$$\Delta x_0=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2\frac{(1-\cos(\alpha_2-\alpha_1))^2}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}+\frac{1-\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2},$$
$$\Delta y_0=\sqrt{\frac{1}{2}x_0^2\Delta\alpha^2+\frac{1+\cos(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_2-\alpha_1)}\Delta p^2}.$$

 

Ausgehend von der Anordnung in Abbildung 1 können wir aus diesen Beziehungen unter der Annahme repräsentativer Werte für den Schnittpunkt $x_0$ und die absoluten Fehler $\Delta\alpha$ und $\Delta p$ die Meßunsicherheiten einer Triangulationsmessung in *x*- und *y*-Richtung bestimmen. Das Ergebnis ist als Funktion des Triangulationswinkels in Abbildung 2 und 3 graphisch dargestellt. Dabei wurde eine absolute Winkelmeßgenauigkeit $\Delta\alpha$ von 1 µrad angenommen und eine absolute Positionsgenauigkeit $\Delta p$ von 1 m. Der Abstand vom Koordinatenursprung $x_0$ beträgt in dem gewählten Beispiel 500 km. Die Grafiken geben den absoluten Meßfehler in Meter an.

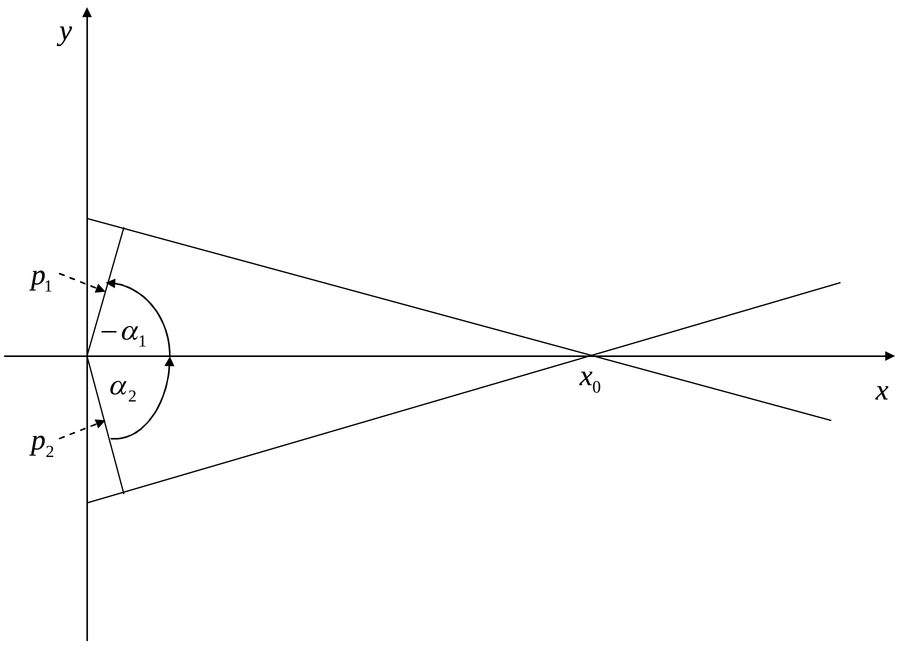


**Abbildung 1. Triangulationsgeometrie**

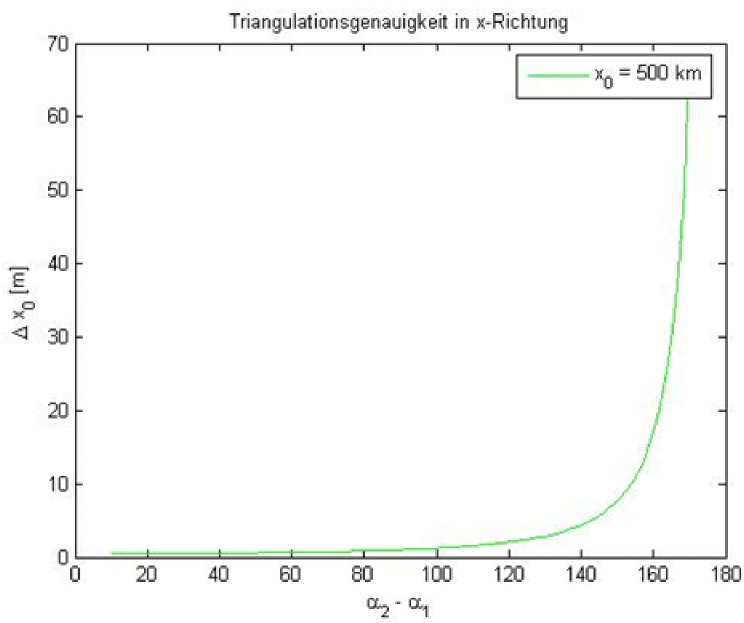


**Abbildung 2. Triangulationsgenauigkeit in x-Richtung**

 

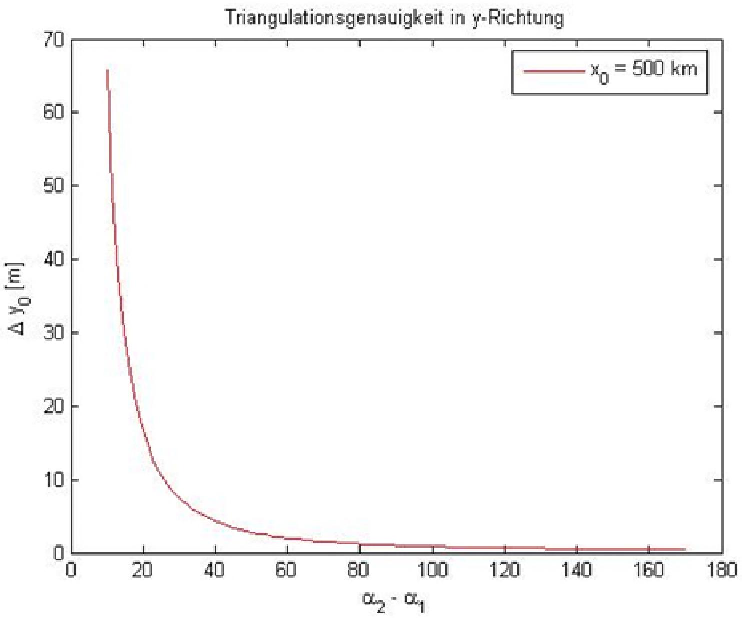


**Abbildung 3. Triangulationsgenauigkeit in y-Richtung**

Um den radialen Meßfehler der Triangulation zu bestimmen, leiten wir den radialen Abstand des Schnittpunktes

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

nach den beiden Komponenten ab. Die partiellen Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial r_0}{\partial x_0} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{r_0},$$
$$\frac{\partial r_0}{\partial y_0} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{r_0}.$$

Das totale Differential der Radialkomponente ist gegeben durch

$$\Delta r_0 = \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial r_0}{\partial x_0} \Delta y_0,$$

womit wir für die Meßunsicherheit nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung den Ausdruck

$$\Delta r_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial r_0}{\partial x_0}\right)^2 \Delta x_0^2 + \left(\frac{\partial r_0}{\partial y_0}\right)^2 \Delta y_0^2} = \frac{1}{r_0}\sqrt{x_0^2 \Delta x_0^2 + y_0^2 \Delta y_0^2}$$

erhalten. Im Falle $y_0 = 0$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\Delta r_0 = \Delta x_0.$$

 

In Abbildung 4 haben wir den maximalen möglichen Fehler $\Delta r_{\max} \equiv \sqrt{\Delta x_0^2 + \Delta y_0^2}$ graphisch dargestellt.

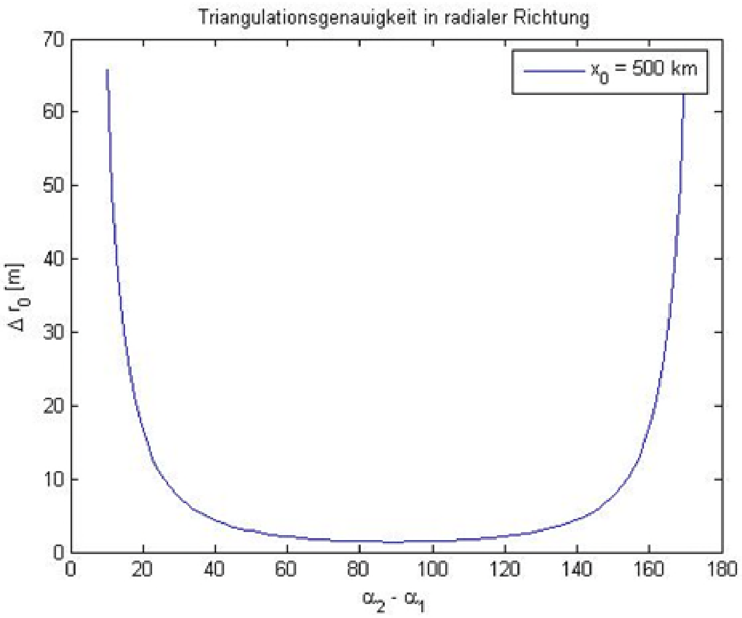


**Abbildung 4. Triangulationsgenauigkeit in radialer Richtung**

Man erkennt, daß das Optimum der Triangulation bei 90° liegt, denn dort ist der maximal mögliche Fehler minimal. Messungen mit hoher Genauigkeit sind innerhalb von $90° \pm 30°$ möglich. Bei 90° beträgt in dem gewählten Beispiel die Meßgenauigkeit 1,008 m, liegt also sehr nahe an der angenommenen Positionsgenauigkeit von 1 m.