Aufgabe: Wie groß sind die Rechenfehler, wenn das Erdellipsoid abhängig von der geographischen Breite durch eine Kugel angenähert wird?

Lösung: Leider ist die Erde keine perfekte Kugel, sondern aufgrund der Zentrifugalkräfte, die durch die Erdrotation entstehen, ein abgeplattetes Rotationsellipsoid wie in Abb. 1 dargestellt:

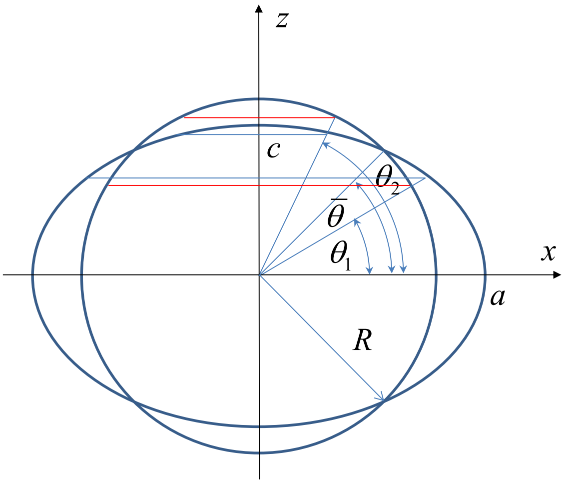

Abbildung 1. Fehlerbetrachtung zur Flächenberechnung bei Rotationskörpern

Anhand der beiden Halbachsen a und c läßt sich aber ein mittlerer Erdradius R definieren. Auch hierfür gibt es verschiedene Ansätze. Die bekannteste Definition verwendet die Volumengleichheit zwischen Kugel und Ellipsoid. Sei

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

das Volumen einer Kugel mit mittlerem Erdradius R und

$$V = \frac{4\pi}{3} a^2 c$$

das Volumen eines abgeplatteten Rotationsellipsoids, dann berechnet sich der mittlere Erd-radius aus der Gleichheit der Volumina zu

$$R = \sqrt[3]{a^2 c}.$$

Für die Erde gilt nach WSG 84

$$a = 6.378.137{,}0 \text{ m}, \quad c = 6.356.752{,}314 \text{ m}, \quad R = \sqrt[3]{a^2 c} = 6.371.000{,}8 \text{ m}.$$

Eine andere Definition erhält man durch Gleichsetzen der Oberflächen. Eine Kugel hat die Oberfläche

$$S = 4\pi R^2,$$

die Oberfläche des Rotationsellipsoids ist gegeben durch

$$S = 2\pi a\left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right).$$

Die darin auftauchenden Größen lassen sich aus der Exzentrizität e der Ellipse berechnen, wobei

$$e = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a} = 0{,}081819191 \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = 1{,}00336409 \ .$$

Mit der Notation

$$\varepsilon \equiv \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$$

können wir auch schreiben:

$$S = 2\pi a\left(a + c\frac{\operatorname{arsinh}\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Wenn der Unterschied der Achsen gering ist, kann der Area Sinus hyperbolicus durch sein Argument angenähert werden und es gilt

$$S = 2\pi a(a+c).$$

Nehmen wir an, daß der mittlere Erdradius dadurch definiert ist, daß die Oberfläche der Kugel genau der Oberfläche des Rotationsellipsoids entspricht. Durch Gleichsetzen der Flächen folgt dann für den mittleren Erdradius der Ausdruck

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + \frac{ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}} = 6371{,}0\ \text{km},$$

der konsistent ist zum Wert der Volumina-Gleichsetzung. Auch ohne die Abweichung von der Kugelgestalt zu kennen, läßt sich das Verhältnis von großer Halbachse und mittlerem Erdradius durch Eliminierung von $c = R^3/a^2$ im Ausdruck

$$R^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right)$$

bestimmen. Setzen wir in die so erhaltene Relation

$$\frac{2a}{R}-\frac{a^3}{R^3}=\frac{R^3}{\sqrt{a^6-R^6}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^6-R^6}}{R^3}$$

die Variable $x\equiv a/R$ ein, erhalten wir eine implizite Gleichung der Form

$$f(x)=\frac{\operatorname{arsinh}\sqrt{x^6-1}}{\sqrt{x^6-1}}+x^3-2x=0,$$

die nur numerisch gelöst werden kann. Ersetzen wir noch den Area Sinus hyperbolicus durch den natürlichen Logarithmus, können wir äquivalent dazu schreiben:

$$f(x)=\frac{\ln\left(\sqrt{x^6-1}+x^3\right)}{\sqrt{x^6-1}}+x^3-2x=0.$$

Diese Funktion ist in Abb. 2 graphisch dargestellt:

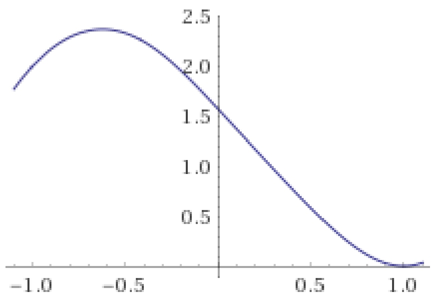

Abbildung 2. Die Funktion *f* besitzt eine Nullstelle am Ort der normierten großen Halbachse des Erdellipsoids

Da die Nullstelle in der Nähe von $x=1$ liegt, können wir die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus bis zur ersten Ordnung verwenden, d.h.

$$\ln\left(\sqrt{x^6-1}+x^3\right)\approx\sqrt{x^6-1}+x^3-1.$$

Damit vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$f(x)=1+\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}+x^3-2x=0$$

mit der reellen Wurzel $x=1$. Diese Näherung ist allerdings in unserem Fall unzulässig, weil wir ja nicht die Kugelgestalt der Erde bestimmen wollen, sondern ihre abgeplattete Form. Man kommt also um ein Newton-Verfahren nicht umhin, wenn man den genauen Wert der Erdabplattung wissen will.

Um den Fehler der Flächenberechnung unter Verwendung des Erdellipsoids zu ermitteln, führen wir im folgenden die Abkürzung $x\equiv a/c$ ein. Abgesehen von der Querschnittsfläche der erzeugenden Ellipse $S_e=2\pi ac$ ist die Oberfläche des Ellipsoids eine reine Funktion des Verhältnisses der beiden Halbachsen

$$S(x) = S_e\left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}\right).$$

Für die Fehlerrechnung bilden wir das totale Differential

$$dS = \frac{\partial S}{\partial a}da + \frac{\partial S}{\partial c}dc,$$

mit dessen Hilfe sich nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz der Fehler der Flächenberechnung aus den Fehlern der Halbachsen zusammensetzt:

$$\Delta S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2}.$$

Um die Kettenregel anwenden zu können, bedarf es der hilfsweisen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}^3}, \quad \frac{\partial}{\partial a}\sqrt{a^2-c^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Damit lautet die partielle Ableitung nach der großen Halbachse

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\pi a + 2\pi\frac{c^3}{a^2-c^2}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^3 - \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right].$$

Ferner folgt mit den hilfsweisen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial c}\frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{2ca^2-c^3}{\sqrt{a^2-c^2}^3}, \quad \frac{\partial}{\partial c}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} = -\frac{a^2}{c^2\sqrt{a^2-c^2}}$$

die partielle Ableitung nach der kleinen Halbachse

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c} &= 2\pi a \operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\frac{\partial}{\partial c}\frac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}} + 2\pi\frac{c^3}{\sqrt{a^2-c^2}}\frac{\partial}{\partial c}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} \\ &= 2\pi a\left[\frac{2ca^2-c^3}{\sqrt{a^2-c^2}^3}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \frac{ca}{a^2-c^2}\right].\end{aligned}$$

Die auf die erzeugende Ellipsenfläche

$$S_e = 2\pi ac = \frac{S}{x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}}$$

normierten Ableitungen lauten damit

$$\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial S}{\partial a} = x + \frac{1}{x^2-1}\left[x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}\right],$$
$$\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial S}{\partial c} = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}^3}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}.$$

Ergänzen wir das totale Differential entsprechend mit der erzeugenden Ellipse, d.h.

$$dS = \frac{S_e}{2\pi ac}\left(\frac{\partial S}{\partial a}da + \frac{\partial S}{\partial c}dc\right) = S_e\left(\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial S}{\partial a}\frac{da}{a} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial S}{\partial c}\frac{dc}{c}\right),$$

so ergibt sich der Gaußsche Fehler gemäß

$$\Delta S = S_e\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi c}\frac{\partial S}{\partial a}\right)^2\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial S}{\partial c}\right)^2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}$$
$$= \frac{S}{x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}}\left\{\left(x + \frac{1}{x^2-1}\left[x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}\right]\right)^2\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}^3}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}\right)^2\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn wir annehmen, daß große und kleine Halbachse mit derselben Genauigkeit bestimmt werden können, erhalten wir den relativen Fehler der Flächenberechnung näherungsweise zu

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \frac{1}{x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}}\left\{\left(x + \frac{1}{x^2-1}\left[x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1}\right]\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}^3}\operatorname{arsinh}\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\frac{\Delta a}{a}.$$

In der Regel ist der Fehler bei der Flächenberechnung aber nicht durch die Rechengenauigkeit, mit der die Halbachsen bestimmt werden können, gegeben, sondern durch die Genauigkeit der GPS-Messung. Bei hundert Metern Genauigkeit mit „Selective Availability“ entspricht dies relativen Genauigkeiten der Halbachsen von

$$\frac{\Delta a}{a} = 1{,}56786 \cdot 10^{-5} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta c}{c} = 1{,}57313 \cdot 10^{-5}.$$

Im folgenden berechnen wir den Fehler, der sich ergibt, wenn wir das Erdellipsoid durch eine Sphäre ersetzen. Die Kugel hat die Parametrisierung

$$x = \varphi(t) = R\cos t, \quad y = \psi(t) = R\sin t$$

mit den Ableitungen

$$\varphi'(t) = -R\sin t, \quad \psi'(t) = R\cos t.$$

Damit ergibt sich die Fläche eines Rotationskörpers im Intervall des Polarwinkels $[\theta_1, \theta_2]$ zu

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = 2\pi R^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin t dt \\ &= 2\pi R^2 [-\cos t]_{\theta_1}^{\theta_2} = 2\pi R^2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) = 4\pi R^2 \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}. \end{aligned}$$

Das Ellipsoid besitzt in Abweichung dazu die Parametrisierung

$$x = \varphi(t) = c\cos t, \quad y = \psi(t) = a\sin t$$

mit den Ableitungen

$$\varphi'(t) = -c\sin t, \quad \psi'(t) = a\cos t.$$

Die Fläche des Ellipsoids in den Grenzen $[\theta_1, \theta_2]$ erhalten wir entsprechend aus

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt = 2\pi a \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin t\sqrt{c^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}dt \\ &= 2\pi a \int_{\cos\theta_2}^{\cos\theta_1} \sqrt{c^2 + (a^2 - c^2)x^2}dx = 2\pi a\sqrt{a^2 - c^2} \int_{\cos\theta_2}^{\cos\theta_1} \sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + x^2}dx \\ &= \pi a\sqrt{a^2 - c^2}\left[x\sqrt{\frac{c^2}{a^2 - c^2} + x^2} + \frac{c^2}{a^2 - c^2}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}x}{c}\right]_{\cos\theta_2}^{\cos\theta_1}. \end{aligned}$$

Setzen wir die Integrationsgrenzen ein, ergibt sich die Fläche eines Ellipsoidrings,

$$\begin{aligned} S &= \pi ac\left(\cos\theta_1\sqrt{1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2}\cos^2\theta_1} - \cos\theta_2\sqrt{1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2}\cos^2\theta_2}\right) \\ &\quad + \pi ac\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\left(\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}\cos\theta_1}{c} - \operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}\cos\theta_2}{c}\right). \end{aligned}$$

Für $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = \pi$ erhalten wir die Oberfläche des abgeplatteten Rotationsellipsoids:

$$S = 2\pi a\left(a + \frac{c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}\operatorname{arsinh}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right).$$

Der relative Fehler der Flächenberechnung, den wir begehen, wenn wir das Rotationsellipsoid durch die Kugel annähern, ist somit gegeben durch

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{S_{Ellipsoid}-S_{Kugel}}{S_{Ellipsoid}},$$

wobei

$$\begin{aligned}S_{Ellipsoid}&=\pi ac\left(\cos\theta_1\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_1}-\cos\theta_2\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_2}\right)\\&\quad+\pi ac\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\cos\theta_1\right)-\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\cos\theta_2\right)\right)\\&\approx\pi ac\left(\cos\theta_1\left(1+\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_1}\right)-\cos\theta_2\left(1+\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_2}\right)\right)\end{aligned}$$

und

$$S_{Kugel}=4\pi R^2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}=4\pi R^2\left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta_2}{2}\right).$$

Am Äquator gilt

$$\begin{aligned}S_{Ellipsoid}&=\pi ac\cos\theta_1\left(1+\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_1}\right)\approx2\pi R^2\frac{R}{a}\cos\theta_1,\\S_{Kugel}&=2\pi R^2\left(2\cos^2\frac{\theta_1}{2}-1\right)=2\pi R^2\cos\theta_1.\end{aligned}$$

Der relative Fehler ergibt sich somit durch

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{S_{Ellipsoid}-S_{Kugel}}{S_{Ellipsoid}}=1-\frac{a}{R}=-1{,}12\cdot10^{-3}.$$

Am Pol gilt

$$\begin{aligned}S_{Ellipsoid}&=\pi ac\left(x-\cos\theta_2\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_2}\right)\\&\quad+\pi ac\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\right)-\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{x^2-1}\cos\theta_2\right)\right)\\&\approx\pi ac\left(1+x-\cos\theta_2\left(1+\sqrt{1+\left(x^2-1\right)\cos^2\theta_2}\right)\right)\approx\pi ac\left(1+x\right)\left(1-\cos\theta_2\right)\end{aligned}$$

sowie

$$S_{Kugel}=4\pi R^2\sin^2\frac{\theta_2}{2}\approx2\pi R^2\left(1-\cos\theta_2\right),$$

womit für den relativen Fehler folgende Abschätzung gilt:

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{S_{Ellipsoid}-S_{Kugel}}{S_{Ellipsoid}}=\frac{1+x-\frac{2a}{R}}{1+x}=1-\frac{2ac}{\left(a+c\right)R}=5{,}61\cdot10^{-4}.$$

Bei 45° Breite verwenden wir folgende Näherungen:

$$S_{Ellipsoid} = \pi ac\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \approx \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi ac\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\right)(\theta_2-\theta_1)$$

und

$$S_{Kugel} = 8\pi R^2 \cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\theta_1}{2} - \cos\frac{\theta_2}{2}\right) = 8\pi R^2 \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{4} \approx \sqrt{2}\pi R^2(\theta_2-\theta_1)$$

mit einem relativen Fehler von

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S}{S} &= \frac{S_{Ellipsoid} - S_{Kugel}}{S_{Ellipsoid}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+1}}\frac{R^2}{ac} \\ &\approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+1}}\frac{a}{R} = -2{,}78\cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

In Tabelle 1 sind die näherungsweisen Ergebnisse zusammengefaßt:

Werte in km^2	Pol	45°	Äquator
S_{Kugel}	107,896	8742,891	12363,687
$S_{Ellipsoid}$	107,957	8740,460	12349,854
$\Delta S/S$	$5{,}61\cdot 10^{-4}$	$-2{,}78\cdot 10^{-4}$	$-1{,}12\cdot 10^{-3}$

Tabelle 1. Einige typische Werte eines 1° x 1° großen Flächenstücks auf der Erdoberfläche

Der Fehler läßt sich noch weiter minimieren, indem wir den mittleren Erdradius R durch den Radius $R(\bar{\theta})$ im Schwerpunkt der zu berechnenden Fläche ersetzen:

$$R(\varphi) = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + c^2\cos^2\varphi}} = \frac{c}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}$$

mit $e = \sqrt{a^2-c^2}/a$. Besser ist es jedoch, die Breite φ mittels $\varphi = \pi/2-\theta$ in eine Polarwinkelabhängigkeit umzuwandeln. Damit folgt

$$R(\theta) = \frac{c}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}} = \frac{ac}{\sqrt{a^2-(a^2-c^2)\sin^2\theta}}$$

mit

$$R(0) = c,\quad R(\pi/2) = a,\quad R(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}ac}{\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{R^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-e^2}}R = 0{,}9994\cdot R.$$

Der dem mittleren Radius entsprechende Winkel liegt allerdings nicht bei 45°, sondern bei

$$\bar{\theta} = \arcsin\sqrt{\frac{x^2-R/c}{x^2-1}} = 54{,}78°.$$

Mit den angegebenen Werten verkleinert sich der relative Fehler am Äquator auf den Wert

$$\frac{\Delta S}{S} = 1 - \frac{a}{R(\pi/2)} = 0,$$

am Pol ist er geringfügig größer:

$$\frac{\Delta S}{S} = 1 - \frac{2ac}{(a+c)R(0)} = \frac{c-a}{c+a} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}.$$

Bei 45° erniedrigt sich der Fehler nochmals um eine Größenordnung:

$$\frac{\Delta S}{S} \approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1}} \frac{a}{R(\pi/4)} = 1 - \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2} + \sqrt{x^2+1}} = -8{,}41 \cdot 10^{-4}.$$

Bei einem kreisförmig angenommenen Oberflächenelement folgt damit ein radialer Fehler von

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2} \frac{\pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{S} \approx -4{,}21 \cdot 10^{-4},$$

der deutlich im Subpromillebereich liegt. Diese Fehler gelten wohlgemerkt für ein $1° \times 1°$ großes Flächenstück, das abhängig von der geographischen Breite am Äquator sehr groß und am Pol sehr klein sein kann.

Der mittlere Radius im Intervall $[\theta_1, \theta_2]$ ist dabei gegeben durch

$$R(\bar{\theta}) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} R(\theta) d\theta = \frac{c}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}.$$

Das elliptische Integral ist leider nicht analytisch lösbar, so daß wir für kleine Differenzen $\theta_2 - \theta_1$ anstelle von

$$R(\bar{\theta}) = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}}$$

auch die Näherungsformel

$$R(\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\left(R(\theta_1) + R(\theta_2)\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta_1}} + \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta_2}}\right)$$

verwenden können. Für eine ausgedehnte Fläche von 1° (ungef. 110 km auf dem Meridian) in der geographischen Breite ist im Anhang ein Berechnungsprogramm angegeben.

Anhang

```
% Ellipsoidfehler

clear all
% Alle Winkel müssen kleiner oder gleich 90° sein
theta_1 = 89;
theta_2 = theta_1 + 1;
theta_quer = (theta_1+theta_2)/2;
Delta_theta = theta_2 - theta_1;
X = ['theta_mean = ', num2str(theta_quer),'°;   Delta_theta  = ',
num2str(Delta_theta),'°'];
disp(X)
theta_1 = theta_1/180*pi;
theta_2 = theta_2/180*pi;
theta_quer = theta_quer/180*pi;
Delta_theta = theta_2 - theta_1;

% Große Halbachse in km
a = 6378.1370;
% Kleine Halbachse in km
c = 6356.752314;
% R = (a^2*c)^(1/3);
% Mittlerer Erdradius in km
R = 6371.0008;

e = sqrt(a^2-c^2)/a;
x = a/c;
X = ['x = ', num2str(x),';   e  = ', num2str(e)];
disp(X)

Delta_a = 1.56786e-5;
S = x+1/sqrt(x^2-1)*asinh(sqrt(x^2-1));
S_a = x + 1/(x^2-1)*(x^3-asinh(sqrt(x^2-1))/sqrt(x^2-1));
S_c = (2*x^2-1)/sqrt(x^2-1)^3*asinh(sqrt(x^2-1))-x/(x^2-1);
Delta_S = sqrt(S_a^2 + S_c^2)/S*Delta_a;

X = ['Delta_a = ', num2str(Delta_a),';   Delta_S  = ', num2str(Delta_S)];
disp(X)

S_ell_1 = pi*a*c*(cos(theta_1)*sqrt(1+(x^2-1)*cos(theta_1)*cos(theta_1))-
cos(theta_2)*sqrt(1+(x^2-1)*cos(theta_2)*cos(theta_2)))/360;
S_ell_2 = pi*a*c/sqrt(x^2-1)*(asinh(sqrt(x^2-1)*cos(theta_1))-
asinh(sqrt(x^2-1)*cos(theta_2)))/360;
% Am Nordpol gilt
if theta_1 == 0
    S_ell_1 = pi*a*c*(x-cos(theta_2)*sqrt(1+(x^2-1)*cos(theta_2)^2))/360;
    S_ell_2 = pi*a*c/sqrt(x^2-1)*(asinh(sqrt(x^2-1))-asinh(sqrt(x^2-
1)*cos(theta_2)))/360;
end
% Am Äquator gilt
if theta_2 == pi/2
    S_ell_1 = pi*a*c*cos(theta_1)*sqrt(1+(x^2-1)*cos(theta_1)^2)/360;
    S_ell_2 = pi*a*c/sqrt(x^2-1)*asinh(sqrt(x^2-1)*cos(theta_1))/360;
end
S_ell = S_ell_1 + S_ell_2;
S_sph = 4*pi*R^2/360*sin(theta_quer)*sin(Delta_theta/2);
```

```
% Fehler bei mittlerem Radius
S_error = 1-S_sph/S_ell;

X = ['S_ell = ', num2str(S_ell),';    S_sph  = ', num2str(S_sph)];
disp(X)
X = ['R = ', num2str(R),';    S_error  = ', num2str(abs(S_error))];
disp(X)

R_quer = c/sqrt(1-e^2*sin(theta_quer)^2);
S_sph = 4*pi/360*R_quer^2*sin(theta_quer)*sin((theta_2-theta_1)/2);
% Fehler bei Radius des mittleren Winkels
S_error = 1-S_sph/S_ell;


X = ['S_ell = ', num2str(S_ell),';    S_sph  = ', num2str(S_sph)];
disp(X)
X = ['R(theta_quer) = ', num2str(R_quer),';    S_error  = ',
num2str(abs(S_error))];
disp(X)
```

Für theta_1 = 0 und theta_2 = 1 gilt:

```
>> ellipsoidfehler
theta_mean = 0.5°;   Delta_theta  = 1°
x = 1.0034;    e  = 0.081819
Delta_a = 1.5679e-05;   Delta_S  = 2.3381e-05
S_ell = 108.1381;   S_sph  = 107.8963
R = 6371.0008;   S_error  = 0.0022359
S_ell = 108.1381;   S_sph  = 107.4142
R(theta_quer) = 6356.7539;   S_error  = 0.0066934
```

In höheren Breiten verbessern sich die Fehler signifikant, z.B. nachfolgend für theta_1 = 44.5 und theta_2 = 45.5.

```
>> ellipsoidfehler
theta_mean = 45.5°;   Delta_theta  = 1°
x = 1.0034;    e  = 0.081819
Delta_a = 1.5679e-05;   Delta_S  = 2.3381e-05
S_ell = 8823.4443;   S_sph  = 8818.7412
R = 6371.0008;   S_error  = 0.00053303
S_ell = 8823.4443;   S_sph  = 8809.3409
R(theta_quer) = 6367.6043;   S_error  = 0.0015984
```

Am Äquator für theta_1 = 89 und theta_2 = 90 werden sie wieder schlechter:

```
>> ellipsoidfehler
theta_mean = 89.5°;   Delta_theta  = 1°
x = 1.0034;    e  = 0.081819
Delta_a = 1.5679e-05;   Delta_S  = 2.3381e-05
S_ell = 12349.8581;   S_sph  = 12363.6871
R = 6371.0008;   S_error  = 0.0011198
S_ell = 12349.8581;   S_sph  = 12391.3935
R(theta_quer) = 6378.1354;   S_error  = 0.0033632
```

