Aufgabe: Berechnen Sie Oberfläche und Flächenschwerpunkt eines Polygons in Kugelkoordinaten.

Lösung: Gegeben sei ein Polygon aus stückweise stetigen Orthodromen über die geographische Länge λ und Breite $\varphi = \pi/2 - \theta$ in den Grenzen

$$\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}], \quad \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Aufgrund der Definition des Schwerpunkts in Kugelkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{S}\int_K x dS = \frac{R^3 \iint_K \sin^2 \theta d\theta \cos \lambda d\lambda}{R^2 \iint_K \sin \theta d\theta d\lambda}, \quad y_s = \frac{1}{S}\int_K y dS = \frac{R^3 \iint_K \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda}{R^2 \iint_K \sin \theta d\theta d\lambda}$$

mit der Oberfläche S ergeben sich durch Subtraktion von Komplementärflächen zur Achtelsphäre[1] folgende Berechnungsformeln:

$$\frac{S}{R^2}\frac{x_s}{R} = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \cos \lambda d\lambda - \sum_{i=1}^{k-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \cos \lambda d\lambda$$
$$-\sum_{i=k}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2 \theta d\theta \cos \lambda d\lambda,$$

$$\frac{S}{R^2}\frac{y_s}{R} = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda - \sum_{i=1}^{k-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda$$
$$-\sum_{i=k}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda,$$

wobei R der Radius der Sphäre ist und $z_s = \sqrt{R^2 - x_s^2 - y_s^2}$ die z-Komponente des Schwerpunkts. Die Oberfläche erhalten wir durch Summation aller Teilflächen unter Berücksichtigung der Komplemente:

$$\frac{S}{R^2} = \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\lambda - \sum_{i=1}^{k-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\lambda - \sum_{i=k}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{i0})}} \sin \theta d\theta d\lambda.$$

[1] Wir wählen das Koordinatensystem so, daß das gesamte Polygon innerhalb der Grenzen einer Achtelsphäre liegt.

Dabei gibt der Index k den Umkehrpunkt der Flächenzählung an, ab dem die Flächen negativ zählen. Der Drehsinn, in dem alle n Begrenzungspunkte durchlaufen werden, sei der Gegenuhrzeigersinn, wobei der Punkt 1 der mit der niedrigsten Länge ist und der Punkt k jener mit der größten. Der Kreuzungspunkt der $i$ten Orthodrome mit dem Äquator besitze die Länge

$$\lambda_{0i} = \arctan \frac{\tan\theta_i \sin\lambda_i - \tan\theta_{i+1} \sin\lambda_{i+1}}{\tan\theta_i \cos\lambda_i - \tan\theta_{i+1} \cos\lambda_{i+1}},$$

und der Neigungswinkel der entsprechenden Orthodromen gegen die z-Achse sei gegeben durch

$$\cot\theta_{0i} = \frac{n_{i,z}}{\sqrt{n_{i,x}^2 + n_{i,y}^2}},$$

wobei sich die Komponenten des Normalenvektors gemäß den Relationen

$$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} n_{i,x} \\ n_{i,y} \\ n_{i,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{i+1}\cos\theta_i \sin\lambda_{i+1} + \cos\theta_{i+1}\sin\theta_i \sin\lambda_i \\ \sin\theta_{i+1}\cos\theta_i \cos\lambda_{i+1} - \cos\theta_{i+1}\sin\theta_i \cos\lambda_i \\ \sin\theta_{i+1}\sin\theta_i \sin\left(\lambda_{i+1} - \lambda_i\right) \end{pmatrix}$$

berechnen. Die Auswertung der Oberfläche erfordert die Auswertung der bestimmten Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i,$$

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\lambda = -\arcsin\frac{\cos\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}} + \arcsin\frac{\cos\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}}$$

und

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin\theta d\theta d\lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i + \arcsin\frac{\cos\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}} - \arcsin\frac{\cos\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}}.$$

Mit den folgenden Summen

$$S_V \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\lambda, \quad S_O \equiv \sum_{i=1}^{k-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta d\lambda, \quad S_U \equiv \sum_{i=k}^{n-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{i0})}} \sin\theta d\theta d\lambda$$

erhalten wir die Polygonfläche aus der Beziehung

$$\frac{S}{R^2} = S_V - S_O - S_U ,$$

wobei

$$S_V = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\lambda_{i+1} - \lambda_i\right),$$

$$S_O = -\sum_{i=1}^{k-1} \arcsin \frac{\cos\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}} + \sum_{i=1}^{k-1} \arcsin \frac{\cos\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}},$$

$$S_U = \sum_{i=k}^{n-1} \left(\lambda_{i+1} - \lambda_i\right) + \sum_{i=k}^{n-1} \arcsin \frac{\cos\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}} - \sum_{i=k}^{n-1} \arcsin \frac{\cos\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\sqrt{1+\cot^2\theta_{0i}}}.$$

Die Berechnung des Schwerpunkts erfordert die Lösung von insgesamt 6 weiteren Integralen. Die zwei einfachsten sind gegeben durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \cos\lambda d\lambda = \frac{\pi}{4}\left(\sin\lambda_{i+1} - \sin\lambda_i\right)$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \sin\lambda d\lambda = \frac{\pi}{4}\left(-\cos\lambda_{i+1} + \cos\lambda_i\right),$$

wohingegen sich die beiden Untergrenzen-Integrale gemäß

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2\theta d\theta \cos\lambda d\lambda = \frac{1}{2}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\left(\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} - \arctan\frac{\tan\left(\lambda_i-\lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sin\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i}\right)} - \frac{1}{2}\sin\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i-\lambda_{0i}\right)}$$

und

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2\theta d\theta \sin\lambda d\lambda = -\frac{1}{2}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\left(\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} - \arctan\frac{\tan\left(\lambda_i-\lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cos\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i}\right)} + \frac{1}{2}\cos\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i-\lambda_{0i}\right)}$$

bestimmen lassen. Die beiden Obergrenzen-Integrale erhalten wir aus

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \cos\lambda d\lambda = \frac{\pi}{4}\left(\sin\lambda_{i+1} - \sin\lambda_i\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\left(\arctan\frac{\tan(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i})}{\cos\theta_{0i}} - \arctan\frac{\tan(\lambda_i-\lambda_{0i})}{\cos\theta_0}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sin\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i})} - \sin\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda_i-\lambda_{0i})}\right)$$

bzw.

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \sin\lambda d\lambda = \frac{\pi}{4}\left(\cos\lambda_i - \cos\lambda_{i+1}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\left(\arctan\frac{\tan(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i})}{\cos\theta_{0i}} - \arctan\frac{\tan(\lambda_i-\lambda_{0i})}{\cos\theta_{0i}}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\cos\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda_{i+1}-\lambda_{0i})} - \cos\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda_i-\lambda_{0i})}\right)$$

Wir führen nun zur weiteren Berechnung der Übersicht halber folgende Abkürzungen ein:

$$V_x \equiv \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda, \qquad O_x \equiv \sum_{i=1}^{k-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda,$$

$$U_x \equiv \sum_{i=k}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2\theta d\theta\cos\lambda d\lambda, \quad \frac{S}{R^2}\frac{x_s}{R} = V_x - O_x - U_x,$$

wobei für die y-Komponente gilt:

$$V_y \equiv \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda, \qquad O_y \equiv \sum_{i=1}^{k-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda,$$

$$U_y \equiv \sum_{i=k}^{n-1}\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}}\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin(\lambda-\lambda_{0i})}} \sin^2\theta d\theta\sin\lambda d\lambda, \quad \frac{S}{R^2}\frac{y_s}{R} = V_y - O_y - U_y.$$

Daraus ergeben sich bereits die gesuchten Lösungen:

$$\frac{x_s}{R} = \frac{1}{2}\frac{2V_x - 2O_x - 2U_x}{S_V - S_O - S_U}, \quad \frac{y_s}{R} = \frac{1}{2}\frac{2V_y - 2O_y - 2U_y}{S_V - S_O - S_U},$$

mit

$$2V_x = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sin\lambda_{i+1} - \sin\lambda_i\right),$$

$$\begin{aligned}2O_x = {} & \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\sin\lambda_{i+1} - \sin\lambda_i\right) \\ & - \sum_{i=1}^{k-1}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} + \sum_{i=1}^{k-1}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_0} \\ & - \sum_{i=1}^{k-1}\sin\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)} + \sum_{i=1}^{k-1}\sin\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2U_x = {} & \sum_{i=k}^{n-1}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} - \sum_{i=k}^{n-1}\sin\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} \\ & + \sum_{i=k}^{n-1}\sin\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)} - \sum_{i=k}^{n-1}\sin\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}\end{aligned}$$

und

$$2V_y = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\cos\lambda_{i+1} + \cos\lambda_i\right),$$

$$\begin{aligned}2O_y = {} & \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\cos\lambda_i - \cos\lambda_{i+1}\right) \\ & + \sum_{i=1}^{k-1}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} - \sum_{i=1}^{k-1}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} \\ & + \sum_{i=1}^{k-1}\cos\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)} - \sum_{i=1}^{k-1}\cos\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2U_y = {} & -\sum_{i=k}^{n-1}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} + \sum_{i=k}^{n-1}\cos\lambda_{0i}\sin\theta_{0i}\arctan\frac{\tan\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}{\cos\theta_{0i}} \\ & - \sum_{i=k}^{n-1}\cos\lambda_{i+1}\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_{i+1} - \lambda_{0i}\right)} + \sum_{i=k}^{n-1}\cos\lambda_i\arctan\frac{\cot\theta_{0i}}{\sin\left(\lambda_i - \lambda_{0i}\right)}.\end{aligned}$$

Falls die trigonometrischen Funktionen das Intervall $[0,\ \pi/2]$ verlassen, sind entsprechende Umrechnungsformeln anzuwenden.

