Aufgabe: Berechnen Sie Oberfläche und Flächenschwerpunkt eines allgemeinen Kugeldreiecks.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit plazieren wir das Dreieck so in einer Viertelsphäre, daß einer der Eckpunkte am Nordpol aufgehängt ist und die beiden Katheten längs eines Meridians verlaufen. Dann liegt die Hypotenuse auf einer Orthodrome (siehe Abb. 1). Durch zwei Drehungen kann jedes beliebige Kugeldreieck in das beschriebene transformiert werden.

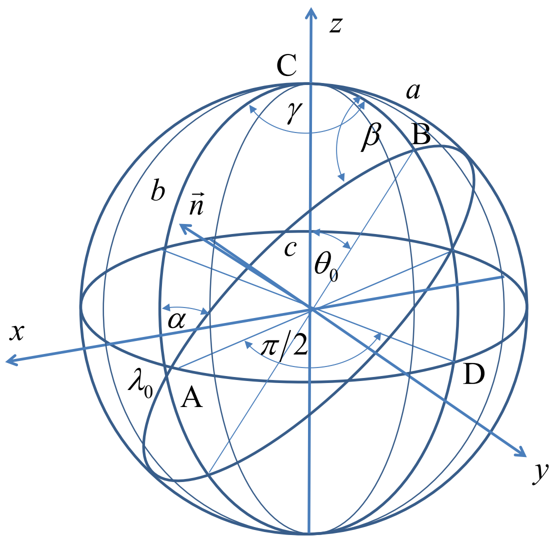

Abbildung 1. Allgemeines, am Nordpol aufgehängtes Kugeldreieck

Der Normalenvektor senkrecht zur Orthodromenebene lautet

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \cos\theta_1 \sin\lambda_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1 \sin\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\lambda_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1 \cos\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

wobei λ_1 und λ_2 die beiden Längengrade sind, die das Kugeldreieck begrenzen. θ_0 ist der Polarwinkel, um den die Ebene, in der die Orthodrome verläuft, gegen die z-Achse gekippt ist. θ_0 ist seinerseits definiert durch den Tangens der geographischen Breite φ:

$$\cot\theta_0 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \equiv \tan\varphi = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}},$$

womit die Gleichung der Orthodromen folgende Gestalt annimmt:

$$\theta(\lambda) = \arcsin\frac{\cot\theta_0}{\sqrt{\sin^2(\lambda-\lambda_0) + \cot^2\theta_0}} = \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}.$$

Für $\lambda_1 = \lambda_0$, wobei $0 \le \lambda_0 \le \pi/2$, ergibt sich daraus der Polarwinkel

$$\theta_1 \equiv \theta(\lambda_1) = \arcsin \frac{\cot\theta_0}{\sqrt{\sin^2(\lambda_1-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}} = \frac{\pi}{2},$$

und im Falle $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ folgt der zweite Polarwinkel zu

$$\theta_2 \equiv \theta(\lambda_2) = \arcsin \frac{\cot\theta_0}{\sqrt{1+\cot^2\theta_0}} = \arcsin\cos\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Allgemein berechnet sich der Flächeninhalt S eines allgemeinen Kugeldreiecks aus dem Doppelintegral

$$\iint dS = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}} \sin\theta d\theta d\lambda = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \right]_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}} d\lambda.$$

Die innere Integration über θ führt auf ein gewöhnliches, einfach zu lösendes Integral:

$$S = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda - R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cot^2\theta_0}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)}}} d\lambda = R^2 \left\{ \lambda_2 - \lambda_1 - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sin(\lambda-\lambda_0)}{\sqrt{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}} d\lambda \right\}.$$

Mit den Substitutionen $x = \lambda - \lambda_0$ und $y = \cos x$ folgt

$$S = R^2 \left\{ \lambda_2 - \lambda_1 - \int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + \cot^2\theta_0}} dx \right\} = R^2 \left\{ \lambda_2 - \lambda_1 + \int_{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cos(\lambda_2-\lambda_0)} \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta_0 - y^2}} dy \right\}$$

$$= R^2(\lambda_2-\lambda_1) + R^2 \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1+\cot^2\theta_0}} \right]_{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cos(\lambda_2-\lambda_0)},$$

woraus sich die Oberfläche des allgemeinen Kugeldreiecks zu

$$S = R^2\left(\lambda_2 - \lambda_1 + \arcsin(\sin\theta_0 \cos(\lambda_2-\lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1-\lambda_0))\right)$$

ergibt. Für $\lambda_1 = \lambda_0$ und $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ beträgt die Fläche $S = R^2(\pi/2 - \theta_0)$.

Der Schwerpunkt des allgemeinen Kugeldreiecks ist definiert durch die Doppelintegrale

$$x_s = \frac{R^3}{S} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}} \sin^2\theta d\theta \cos\lambda d\lambda, \quad y_s = \frac{R^3}{S} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}} \sin^2\theta d\theta \sin\lambda d\lambda,$$

wobei das Integral über den quadratischen Sinus einfach zu lösen ist:

$$\int_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]_0^{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} - \frac{1}{2}\frac{\cot\theta_0 \sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}.$$

Damit erhalten wir die x- und y-Koordinate des Schwerpunkts aus einer reinen Integration über die geographische Länge:

$$x_s = \frac{R^3}{2S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} - \frac{\cot\theta_0 \sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}\right)\cos\lambda d\lambda,$$
$$y_s = \frac{R^3}{2S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} - \frac{\cot\theta_0 \sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}\right)\sin\lambda d\lambda.$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos\lambda = \cos(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \cos(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0,$$
$$\sin\lambda = \sin(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \sin(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0$$

können wir entsprechend umformen, so daß wir insgesamt 8 Integrale zu lösen haben:

$$\frac{2S}{R^3}x_s = \cos\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\cos(\lambda-\lambda_0)d\lambda - \sin\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\sin(\lambda-\lambda_0)d\lambda$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin(\lambda-\lambda_0)\cos(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda + \sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin^2(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda$$

bzw.

$$\frac{2S}{R^3}y_s = \cos\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\sin(\lambda-\lambda_0)d\lambda + \sin\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\cos(\lambda-\lambda_0)d\lambda$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin^2(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda - \sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin(\lambda-\lambda_0)\cos(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda.$$

Durch Drehung um λ_0 ergeben sich neue Integrationsgrenzen:

$$\frac{2S}{R^3}x_s = \cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\cos x dx - \sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx + \sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx,$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx+\sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\cos x\,dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx,$$

und durch geeignete Substitution des Sinus folgt weiter:

$$\frac{2S}{R^3}x_s=\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx-\sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx,$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx.$$

Mittels partieller Integration können wir eines der Integrale in eine lösbare Form überführen:

$$\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx=-\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$-\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}+\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

so daß sich unsere Integrationen weiter vereinfachen:

$$\frac{2S}{R^3}x_s=\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$+\sin\lambda_0\left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}\right),$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx$$
$$-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx$$
$$-\cos\lambda_0\left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}\right).$$

Diese Ausdrücke gruppieren wir entsprechend um:

$$\frac{2S}{R^3}x_s = \cos\lambda_0 \cot\theta_0 \int\limits_{\tan\theta_0 \sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0 \sin(\lambda_2-\lambda_0)} \left[\arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] dx + \sin\lambda_0 \cot\theta_0 \int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{dx}{\sin^2 x + \cot^2\theta_0}$$
$$+\cos(\lambda_2-\lambda_0)\sin\lambda_0 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} - \cos(\lambda_1-\lambda_0)\sin\lambda_0 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s = \sin\lambda_0 \cot\theta_0 \int\limits_{\tan\theta_0 \sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0 \sin(\lambda_2-\lambda_0)} \left[\arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] dx - \cos\lambda_0 \cot\theta_0 \int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{1}{\sin^2 x + \cot^2\theta_0} dx$$
$$-\cos(\lambda_2-\lambda_0)\cos\lambda_0 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} + \cos(\lambda_1-\lambda_0)\cos\lambda_0 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}.$$

Das erste der beiden noch verbliebenen Integrale ist elementar lösbar,

$$\int\limits_{\tan\theta_0 \sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0 \sin(\lambda_2-\lambda_0)} \left[\arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right] dx = \tan\theta_0 \sin(\lambda_2-\lambda_0) \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}$$
$$-\tan\theta_0 \sin(\lambda_1-\lambda_0) \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

und das zweite hat ebenfalls eine einfache Lösung:

$$\int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{1}{\sin^2 x + \cot^2\theta_0} dx = \tan\theta_0 \sin\theta_0 \left[\arctan\frac{\tan x}{\cos\theta_0}\right]_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}$$
$$= \tan\theta_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0}\right).$$

Damit erhalten wir schließlich die Beziehungen

$$\frac{2S}{R^3}x_s = \sin\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0}\right)$$
$$+\left(\sin(\lambda_2-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda_2-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}$$
$$-\left(\sin(\lambda_1-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda_1-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s = -\cos\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0}\right)$$
$$-\left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda_2-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}$$
$$+\left(\cos(\lambda_1-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda_1-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

und aus den Additionstheoremen

$$\cos\lambda = \cos(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0,$$
$$\sin\lambda = \sin(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0$$

folgen für $\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_0$ die gesuchten Schwerpunktkoordinaten

$$\begin{aligned} x_s = {} & \frac{R}{2}\frac{\sin\lambda_0 \sin\theta_0\left(\operatorname{arccot}(\cos\theta_0 \cot(\lambda_2-\lambda_0)) - \operatorname{arccot}(\cos\theta_0\cot(\lambda_1-\lambda_0))\right)}{\lambda_2-\lambda_1+\arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_2-\lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1-\lambda_0))} \\ & + \frac{R}{2}\frac{\sin\lambda_2 \operatorname{arccot}(\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)) - \sin\lambda_1\operatorname{arccot}(\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0))}{\lambda_2-\lambda_1+\arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_2-\lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1-\lambda_0))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_s = {} & -\frac{R}{2}\frac{\cos\lambda_0 \sin\theta_0\left(\operatorname{arccot}(\cos\theta_0 \cot(\lambda_2-\lambda_0)) + \operatorname{arccot}(\cos\theta_0\cot(\lambda_1-\lambda_0))\right)}{\lambda_2-\lambda_1+\arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_2-\lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1-\lambda_0))} \\ & - \frac{R}{2}\frac{\cos\lambda_2 \operatorname{arccot}(\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)) - \cos\lambda_1\operatorname{arccot}(\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0))}{\lambda_2-\lambda_1+\arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_2-\lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1-\lambda_0))}. \end{aligned}$$

Mithin erhalten wir für $\lambda_1 = \lambda_0$ und $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ elementare Lösungen:

$$x_s = \frac{R}{2}\left[\cos\lambda_0 - \frac{\pi(1-\sin\theta_0)}{\pi-2\theta_0}\sin\lambda_0\right],$$
$$y_s = \frac{R}{2}\left[\sin\lambda_0 + \frac{\pi(1-\sin\theta_0)}{\pi-2\theta_0}\cos\lambda_0\right].$$

Der radiale Schwerpunktabstand ist somit gegeben durch die Wurzel aus der Summe der Betragsquadrate

$$x_s^2 = \frac{R^2}{4}\left(\cos^2\lambda_0 - \frac{\pi\sin 2\lambda_0}{\pi-2\theta_0}(1-\sin\theta_0) + \frac{\pi^2\sin^2\lambda_0}{(\pi-2\theta_0)^2}(1-\sin\theta_0)^2\right),$$
$$y_s^2 = \frac{R^2}{4}\left(\sin^2\lambda_0 + \frac{\pi\sin 2\lambda_0}{\pi-2\theta_0}(1-\sin\theta_0) + \frac{\pi^2\cos^2\lambda_0}{(\pi-2\theta_0)^2}(1-\sin\theta_0)^2\right),$$

d.h.

$$\rho_s = \frac{R}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2(1-\sin\theta_0)^2}{(\pi-2\theta_0)^2}}.$$

Dieser Ausdruck ist erwartungsgemäß unabhängig vom Drehwinkel λ_0. Für $\theta_0 = \pi/4$ sind die Schwerpunktkoordinaten gegeben durch

$$x_s = \frac{R}{2}\left[\cos\lambda_0 - \left(2-\sqrt{2}\right)\sin\lambda_0\right],$$
$$y_s = \frac{R}{2}\left[\sin\lambda_0 + \left(2-\sqrt{2}\right)\cos\lambda_0\right].$$

Damit reduziert sich ρ_s auf den Ausdruck

$$\rho_s = \frac{R}{2}\sqrt{1+\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{7-4\sqrt{2}} \approx \frac{R}{2},$$

was einem Polarwinkel von

$$\theta_s = \arcsin\frac{\rho_s}{R} = \arcsin\sqrt{\frac{7}{4}-\sqrt{2}} = 35{,}4°$$

entspricht oder einer geographischen Breite von 54,6°. Für $\lambda_0 = 0$ erhalten wir die Koordinaten

$$x_s = \frac{1}{2}R, \quad y_s = R\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \quad z_s = \frac{1}{2}R\sqrt{4\sqrt{2}-3} \approx \frac{1}{2}\sqrt{3}R,$$

mit

$$\lambda_s = \arctan\left(2-\sqrt{2}\right) \approx 30{,}4°.$$

Im Falle $\lambda_0 = \pi/2$ lautet unser Ergebnis

$$x_s = -R\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \quad y_s = \frac{R}{2}, \quad z_s = \frac{1}{2}R\sqrt{4\sqrt{2}-3},$$

wobei im 2. Quadranten gilt:

$$\lambda_s = \pi - \arctan\left|\frac{y_s}{x_s}\right| = \pi - \arctan\frac{1}{2-\sqrt{2}} \approx 120{,}4°,$$

was zeigt, daß eine Drehung um 90°, bei der die Phase berücksichtigt wird, zum selben Ergebnis kommt wie im drehungsfreien Fall.

Für $\lambda_0 = \pi/4$ ergeben sich schließlich die Werte

$$x_s = \frac{1}{4}R\left(2-\sqrt{2}\right), \quad y_s = \frac{1}{4}R\left(3\sqrt{2}-2\right), \quad z_s = \frac{1}{2}R\sqrt{4\sqrt{2}-3},$$

mit einer Länge von

$$\lambda_s = \arctan\frac{3\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}} \approx 75{,}4°, \quad \text{d.h.} \quad \lambda_s - \lambda_0 = 30{,}4°.$$

Wenn der Schwerpunkt einer exakten Vierteldrehung mit $\lambda_s = 45°$ bzw. $x_s = y_s$ entsprechen soll, müßte die Drehung um

$$\lambda_0 = \arctan\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}} \approx 14{,}6°$$

ausgeführt werden. Bedauerlicherweise besitzt das allgemeine Kugeldreieck keine einfachen Winkel zu den entsprechenden Schwerpunkten. Das gilt auch, wenn man den spitzen Winkel am Nordpol aufhängt.

