Aufgabe: Berechnen Sie Oberfläche und Flächenschwerpunkt eines rechtwinkligen Kugeldreiecks.

Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit plazieren wir das Dreieck so in einer Viertelsphäre, daß eine Kathete auf dem Äquator verläuft und die andere längs eines Meridians. Dann liegt die Hypotenuse auf einer Orthodrome (siehe Abb. 1). Durch zwei Drehungen kann jedes beliebige rechtwinklige Kugeldreieck in das beschriebene transformiert werden.

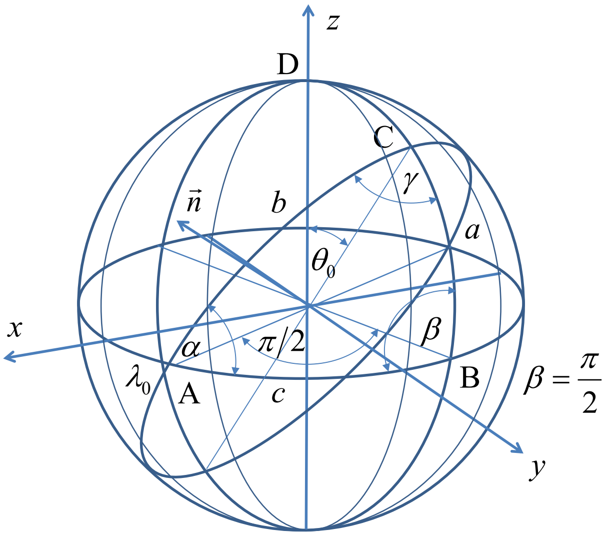

Abbildung 1. Rechtwinkliges, um die z-Achse gedrehtes sphärisches Dreieck

Der Normalenvektor senkrecht zur Orthodromenebene lautet

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \cos\theta_1 \sin\lambda_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1 \sin\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\lambda_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1 \cos\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix},$$

wobei λ_1 und λ_2 die beiden Längengrade sind, die das Kugeldreieck begrenzen, und θ_0 der Polarwinkel, um den die Ebene, in der die Orthodrome verläuft, gegen die z-Achse gekippt ist. Der Polarwinkel seinerseits ist definiert durch den Tangens der geographischen Breite φ:

$$\cot\theta_0 = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) \equiv \tan\varphi = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}},$$

womit die Gleichung der Orthodrome folgende Gestalt annimmt:

$$\theta(\lambda) = \arcsin\frac{\cot\theta_0}{\sqrt{\sin^2(\lambda - \lambda_0) + \cot^2\theta_0}} = \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda - \lambda_0)}.$$

Für $\lambda_1 = \lambda_0$, wobei $0 \le \lambda_0 \le \pi/2$, ergibt sich daraus der Polarwinkel

$$\theta_1 \equiv \theta(\lambda_1) = \arcsin \frac{\cot\theta_0}{\sqrt{\sin^2(\lambda_1 - \lambda_0) + \cot^2\theta_0}} = \frac{\pi}{2},$$

und im Falle $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ folgt der zweite Polarwinkel zu

$$\theta_2 \equiv \theta(\lambda_2) = \arcsin \frac{\cot\theta_0}{\sqrt{1 + \cot^2\theta_0}} = \arcsin\cos\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

Mit den Betragsquadraten des Normalenvektors in radialer und polarer Richtung, i.e.

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 &= \sin^2\theta_2\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2\sin^2\theta_1 - 2\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\cos(\lambda_2 - \lambda_1), \\ n_z^2 &= \sin^2\theta_2\sin^2\theta_1\sin^2(\lambda_2 - \lambda_1), \end{aligned}$$

ergeben sich folgende Skalarprodukte mit den entsprechenden Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\vec{e}_z &= |\vec{n}|\cos\theta_0 = \left(\sqrt{n_x^2 + n_y^2}\,\vec{e}_\rho + n_z\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_z = n_z, \\ \vec{n}\cdot\vec{e}_\rho &= |\vec{n}|\sin\theta_0 = \left(\sqrt{n_x^2 + n_y^2}\,\vec{e}_\rho + n_z\vec{e}_z\right)\cdot\vec{e}_\rho = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \end{aligned}$$

Allgemein berechnet sich der Flächeninhalt S eines rechtwinkligen Kugeldreiecks anhand des Doppelintegrals

$$\iint dS = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta\, d\lambda = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \right]_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}} d\lambda.$$

Die innere Integration über θ führt auf ein gewöhnliches, einfach zu lösendes Integral:

$$S = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\cot^2\theta_0}{\sin^2(\lambda - \lambda_0)}}} d\lambda = R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sin(\lambda - \lambda_0)}{\sqrt{\sin^2(\lambda - \lambda_0) + \cot^2\theta_0}} d\lambda.$$

Mit den Substitutionen $x = \lambda - \lambda_0$ und $y = \cos x$ folgt nämlich

$$\begin{aligned} S &= R^2 \int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x + \cot^2\theta_0}} dx = -R^2 \int_{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cos(\lambda_2-\lambda_0)} \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\theta_0 - y^2}} dy \\ &= -R^2 \left[\arcsin \frac{y}{\sqrt{1+\cot^2\theta_0}} \right]_{\cos(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cos(\lambda_2-\lambda_0)}, \end{aligned}$$

woraus sich die Oberfläche des rechtwinkligen Kugeldreiecks zu

$$S = R^2\left(\arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_1 - \lambda_0)) - \arcsin(\sin\theta_0\cos(\lambda_2 - \lambda_0))\right)$$

ergibt. Für $\lambda_1 = \lambda_0$ und $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ beträgt die Fläche $S = R^2\theta_0$.

Der Schwerpunkt eines rechtwinkligen Kugeldreiecks ist definiert durch die Doppelintegrale

$$x_s = \frac{R^3}{S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \cos\lambda d\lambda, \quad y_s = \frac{R^3}{S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \sin\lambda d\lambda,$$

wobei das Integral über den quadratischen Sinus einfach zu lösen ist:

$$\int_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]_{\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} + \frac{1}{2}\frac{\cot\theta_0\sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}.$$

Damit erhalten wir die *x*- und *y*-Koordinate des Schwerpunkts aus den Integrationen

$$x_s = \frac{R^3}{S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} + \frac{1}{2}\frac{\cot\theta_0\sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}\right)\cos\lambda d\lambda,$$
$$y_s = \frac{R^3}{S}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)} + \frac{1}{2}\frac{\cot\theta_0\sin(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}\right)\sin\lambda d\lambda.$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos\lambda = \cos(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \cos(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0,$$
$$\sin\lambda = \sin(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \sin(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0$$

können wir entsprechend umformen und haben somit insgesamt 12 Integrale zu lösen:

$$\frac{2S}{R^3}x_s = \frac{\pi}{2}(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1) - \cos\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\cos(\lambda-\lambda_0)d\lambda$$
$$+\sin\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda-\lambda_0)}\sin(\lambda-\lambda_0)d\lambda + \cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin(\lambda-\lambda_0)\cos(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda$$
$$-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin^2(\lambda-\lambda_0)}{\sin^2(\lambda-\lambda_0)+\cot^2\theta_0}d\lambda$$

bzw.

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\frac{\pi}{2}\left(\cos\lambda_1-\cos\lambda_2\right)-\cos\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin\left(\lambda-\lambda_0\right)}\sin\left(\lambda-\lambda_0\right)d\lambda$$
$$-\sin\lambda_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin\left(\lambda-\lambda_0\right)}\cos(\lambda-\lambda_0)d\lambda+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin^2\left(\lambda-\lambda_0\right)}{\sin^2\left(\lambda-\lambda_0\right)+\cot^2\theta_0}d\lambda$$
$$+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\sin\left(\lambda-\lambda_0\right)}{\sin^2\left(\lambda-\lambda_0\right)+\cot^2\theta_0}\cos(\lambda-\lambda_0)d\lambda$$

Durch Drehung um λ_0 ergeben sich neue Integrationsgrenzen:

$$\frac{2S}{R^3}x_s=\frac{\pi}{2}\left(\sin\lambda_2-\sin\lambda_1\right)-\cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\cos x\,dx$$
$$+\sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}\cos x\,dx$$
$$-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}dx,$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\frac{\pi}{2}\left(\cos\lambda_1-\cos\lambda_2\right)-\cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx$$
$$-\sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\cos x\,dx+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}\cos x\,dx,$$

und durch geeignete Substitution des Sinus folgt weiter:

$$\frac{2S}{R^3}x_s=\frac{\pi}{2}\left(\sin\lambda_2-\sin\lambda_1\right)-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx$$
$$+\sin\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx$$
$$-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}dx,$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\frac{\pi}{2}\left(\cos\lambda_1-\cos\lambda_2\right)-\cos\lambda_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx$$
$$-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{\sin^2x}{\sin^2x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$+\sin\lambda_0\cot\theta_0\int_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x}{x^2+1}dx.$$

Nun können wir mittels partieller Integration wie folgt umformen:

$$\int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin x}\sin x\,dx = -\cot\theta_0 \int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}\,dx$$
$$-\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}+\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

womit sich die Integrationen weiter vereinfachen:

$$\frac{2S}{R^3}x_s=\frac{\pi}{2}(\sin\lambda_2-\sin\lambda_1)-\cos\lambda_0\cot\theta_0\int\limits_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\left(\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{1}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$-\sin\lambda_0\left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}\right),$$

$$\frac{2S}{R^3}y_s=\frac{\pi}{2}(\cos\lambda_1-\cos\lambda_2)-\sin\lambda_0\cot\theta_0\int\limits_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\left(\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$+\cos\lambda_0\cot\theta_0\int\limits_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}\frac{1}{\sin^2 x+\cot^2\theta_0}dx$$
$$+\cos\lambda_0\left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\cos(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}\right).$$

Das erste noch verbliebene Integral ist elementar lösbar,

$$\int\limits_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\arctan\frac{1}{x}dx=-\int\limits_{\cot\theta_0/\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cot\theta_0/\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{\arctan y}{y^2}dy=\left[\frac{1}{y}\arctan y+\frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{y^2}\right]_{\cot\theta_0/\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\cot\theta_0/\sin(\lambda_2-\lambda_0)}$$
$$=\tan\theta_0\left[x\arctan\frac{1}{x}\right]_{0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}+\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan^2\theta_0\sin^2(\lambda_2-\lambda_0)}{1+\tan^2\theta_0\sin^2(\lambda_1-\lambda_0)}$$
$$+\tan\theta_0\left[\sin(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\sin(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)}\right],$$

und das zweite hat die Lösung

$$\int\limits_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tan^2\theta_0\sin^2(\lambda_2-\lambda_0)}{1+\tan^2\theta_0\sin^2(\lambda_1-\lambda_0)}.$$

Die Differenz aus beiden liefert das übersichtliche Ergebnis

$$\cot\theta_0\int\limits_{\tan\theta_0\sin(\lambda_1-\lambda_0)}^{\tan\theta_0\sin(\lambda_2-\lambda_0)}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$=\sin(\lambda_2-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)}-\sin(\lambda_1-\lambda_0)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},$$

und auch das letzte noch verbliebene Integral kann elementar ausgeführt werden:

$$\cot\theta_0 \int_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0} \frac{1}{\sin^2 x + \cot^2\theta_0}\, dx = \sin\theta_0 \left[\arctan\frac{\tan x}{\cos\theta_0} \right]_{\lambda_1-\lambda_0}^{\lambda_2-\lambda_0}$$
$$= \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0} \right).$$

Damit erhalten wir schließlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{2S}{R^3} x_s = {} & \frac{\pi}{2}(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1) - \sin\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0} \right) \\ & - \left(\sin(\lambda_2-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda_2-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} \\ & + \left(\sin(\lambda_1-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda_1-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2S}{R^3} y_s = {} & \frac{\pi}{2}(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2) + \cos\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0} \right) \\ & + \left(\cos(\lambda_2-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda_2-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} \\ & - \left(\cos(\lambda_1-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda_1-\lambda_0)\sin\lambda_0\right)\arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)},\end{aligned}$$

und mit den Additionstheoremen

$$\cos\lambda = \cos(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \cos(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 - \sin(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0,$$
$$\sin\lambda = \sin(\lambda-\lambda_0+\lambda_0) = \sin(\lambda-\lambda_0)\cos\lambda_0 + \cos(\lambda-\lambda_0)\sin\lambda_0$$

folgen mit beiden Integrationsgrenzen die übersichtlicheren Ausdrücke

$$\begin{aligned}x_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2}(\sin\lambda_2 - \sin\lambda_1) \\ & - \frac{1}{2S} R^3 \sin\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0} \right) \\ & - \frac{1}{2S} R^3 \left(\sin\lambda_2 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} - \sin\lambda_1 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2}(\cos\lambda_1 - \cos\lambda_2) \\ & + \frac{1}{2S} R^3 \cos\lambda_0 \sin\theta_0 \left(\arctan\frac{\tan(\lambda_2-\lambda_0)}{\cos\theta_0} - \arctan\frac{\tan(\lambda_1-\lambda_0)}{\cos\theta_0} \right) \\ & + \frac{1}{2S} R^3 \left(\cos\lambda_2 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_2-\lambda_0)} - \cos\lambda_1 \arctan\frac{\cot\theta_0}{\sin(\lambda_1-\lambda_0)} \right).\end{aligned}$$

Die obigen Additionstheoreme erlauben ferner eine einheitliche Differenzwinkelnotation:

$$\begin{aligned}
x_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \left(\frac{\pi}{2} \left(\sin(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \right) \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \left(\frac{\pi}{2} \left(\sin(\lambda_1 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_1 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \right) \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \sin \lambda_0 \sin \theta_0 \left(\arctan \frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} - \arctan \frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} \right) \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \left(\sin(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_2 - \lambda_0)} \\
& + \frac{1}{2S} R^3 \left(\sin(\lambda_1 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_1 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2} \left(\cos(\lambda_1 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_1 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2} \left(\cos(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \\
& + \frac{1}{2S} R^3 \cos \lambda_0 \sin \theta_0 \left(\arctan \frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} - \arctan \frac{\tan(\lambda_1 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} \right) \\
& + \frac{1}{2S} R^3 \left(\cos(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_2 - \lambda_0)} \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \left(\cos(\lambda_1 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_1 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_1 - \lambda_0)}.
\end{aligned}$$

Zur Validierung der Lösungen betrachten wir nachfolgend einige Spezialfälle. So folgen z.B. für $\lambda_1 = \lambda_0$ Gleichungen, die ausschließlich vom rechten Begrenzungswinkel λ_2 abhängen:

$$\begin{aligned}
x_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \left(\frac{\pi}{2} \left(\sin(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) - \frac{\pi}{2} \sin \lambda_0 \right) \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \sin \lambda_0 \sin \theta_0 \arctan \frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} + \frac{1}{2S} R^3 \sin \lambda_0 \frac{\pi}{2} \\
& - \frac{1}{2S} R^3 \left(\sin(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 + \cos(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_2 - \lambda_0)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_s = {} & \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2} \cos \lambda_0 - \frac{1}{2S} R^3 \frac{\pi}{2} \left(\cos(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \\
& + \frac{1}{2S} R^3 \cos \lambda_0 \sin \theta_0 \arctan \frac{\tan(\lambda_2 - \lambda_0)}{\cos \theta_0} - \frac{1}{2S} R^3 \cos \lambda_0 \frac{\pi}{2} \\
& + \frac{1}{2S} R^3 \left(\cos(\lambda_2 - \lambda_0) \cos \lambda_0 - \sin(\lambda_2 - \lambda_0) \sin \lambda_0 \right) \arctan \frac{\cot \theta_0}{\sin(\lambda_2 - \lambda_0)},
\end{aligned}$$

und falls zusätzlich $\lambda_2 = \lambda_0 + \pi/2$ gilt, folgt schließlich

$$x_s = \frac{1}{2S} R^3 \left[\frac{\pi}{2} \cos\lambda_0 - \sin\lambda_0 \sin\theta_0 \frac{\pi}{2} - \cos\lambda_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right],$$
$$y_s = \frac{1}{2S} R^3 \left[\frac{\pi}{2} \sin\lambda_0 + \cos\lambda_0 \sin\theta_0 \frac{\pi}{2} - \sin\lambda_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right].$$

Setzen wir die entsprechende Fläche $S = R^2\theta_0$ in die Gleichungen ein, erhalten wir als einfachste Lösungen

$$x_s = \frac{1}{2} R \left(\cos\lambda_0 - \frac{\pi}{2} \frac{\sin\lambda_0 \sin\theta_0}{\theta_0} \right),$$
$$y_s = \frac{1}{2} R \left(\sin\lambda_0 + \frac{\pi}{2} \frac{\cos\lambda_0 \sin\theta_0}{\theta_0} \right).$$

Der radiale Schwerpunktabstand ist gegeben durch die Wurzel aus der Summe der Betragsquadrate

$$x_s^2 = \frac{1}{4} R^2 \left(\cos^2\lambda_0 - \frac{\pi}{2} \sin 2\lambda_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0} + \frac{\pi^2}{4} \sin^2\lambda_0 \frac{\sin^2\theta_0}{\theta_0^2} \right),$$
$$y_s^2 = \frac{1}{4} R^2 \left(\sin^2\lambda_0 + \frac{\pi}{2} \sin 2\lambda_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0} + \frac{\pi^2}{4} \cos^2\lambda_0 \frac{\sin^2\theta_0}{\theta_0^2} \right),$$

d.h.

$$\rho_s = \frac{1}{2} R \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4} \frac{\sin^2\theta_0}{\theta_0^2}},$$

und ist unabhängig vom Drehwinkel λ_0 des rechtwinkligen Dreiecks.

Für $\theta_0 = \pi/4$ ergibt sich ein Polarwinkel von 60°, was einer geographischen Breite von 30° entspricht:

$$\rho_s = \frac{1}{2} R \sqrt{1 + 4\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} R = R \sin\frac{\pi}{3}.$$

Für $\lambda_0 = 0$ erhalten wir die Schwerpunktkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{2} R, \quad y_s = \frac{\pi}{4} R \frac{\sin\theta_0}{\theta_0} = \frac{1}{2}\sqrt{2} R,$$

wobei sich $\theta_0 = \pi/4$ aus dem Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

ableitet. Das entspricht dem Schwerpunkt einer Sechzehntelsphäre:

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2} \right).$$

Im Falle $\lambda_0 = \pi/2$ lauten die Koordinaten

$$x_s = -\frac{\pi}{4} R \frac{\sin\theta_0}{\theta_0} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}R, \quad y_s = \frac{1}{2} R,$$

was zeigt, daß eine Drehung um 90° phasenverschoben zum selben Ergebnis führt. Hierbei bestimmt sich der Polarwinkel $\theta_0 = \pi/4$ aus dem Normalenvektor der Vierteldrehung

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Das entspricht ebenfalls dem Schwerpunkt einer Sechzehntelsphäre

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(-\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2} \right).$$

Für eine Drehung um 45° ergeben sich schließlich die Koordinaten

$$x_s = \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right), \quad y_s = \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1 \right),$$

wobei der Normalenvektor der Achteldrehung um $\lambda_0 = \pi/4$ durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

gegeben ist und ebenfalls den Schwerpunkt einer Sechzehntelsphäre mit

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}} \right)$$

ergibt.

