Aufgabe: Berechnen Sie Schwerpunkt und Oberfläche einer Sechzehntelsphäre in Kugelkoordinaten.

Lösung: Halbieren wir eine Kugel durch Schnitt mit einer Ebene, die um 45° gegen die z-Achse in Richtung der positiven y-Achse geneigt ist, entsteht eine Sechzehntelsphäre, die in Abb. 1 durch das sphärische Dreieck ABD dargestellt ist.

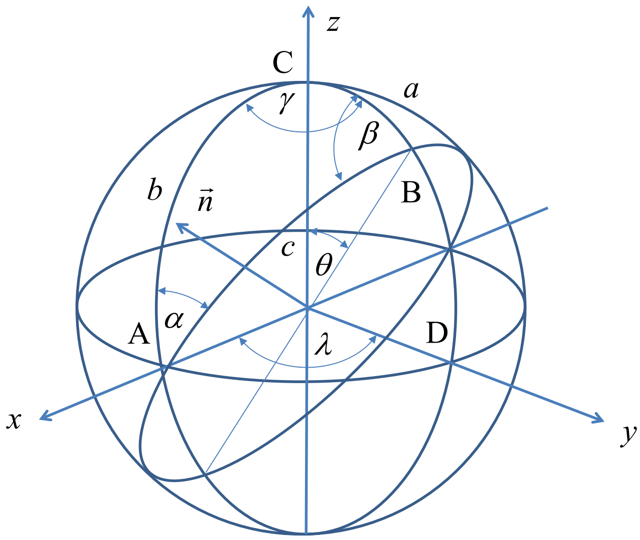

Abbildung 1. Die Seitenhalbierende des 1. Quadranten, der Äquator und der 90. Längengrad definieren eine Sechzehntelsphäre

Die Obergrenze dieser Sechzehntelsphäre ist durch den Äquator mit dem Polarwinkel $\theta = \pi/2$ gegeben. Die Gleichung der Seitenhalbierenden des ersten Quadranten in Abhängigkeit von der Länge λ stellt eine Orthodrome dar, für die gilt:

$$\theta(\lambda) = \arcsin \frac{n_z}{\sqrt{(n_x^2 + n_y^2)\sin^2(\lambda - \lambda_0) + n_z^2}},$$

wobei λ_0 den Durchstoßpunkt der Kurve durch den Äquator angibt und n_x, n_y und n_z die Komponenten des Normalenvektors senkrecht zur Schnittebene sind. Der Punkt A hat die Koordinaten $\lambda_1 = 0$, $\theta_1 = \pi/2$, dem Punkt B entsprechen die Winkel $\lambda_2 = \pi/2$ und $\theta_2 = \pi/4$. Damit lautet der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2 \cos\theta_1 \sin\lambda_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1 \sin\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \cos\theta_1 \cos\lambda_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1 \cos\lambda_1 \\ \sin\theta_2 \sin\theta_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

und der Durchstoßpunkt liegt bei

$$\lambda_0 = \arctan \frac{\tan\theta_1 \sin\lambda_1 - \tan\theta_2 \sin\lambda_2}{\tan\theta_1 \cos\lambda_1 - \tan\theta_2 \cos\lambda_2} = -\arctan \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Die Orthodrome nimmt in diesem Fall die Gestalt

$$\theta(\lambda) = \arcsin \frac{n_z}{\sqrt{(n_x^2 + n_y^2)\sin^2(\lambda - \lambda_0) + n_z^2}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda + 1}}$$

an. Damit ergibt sich für das Oberflächenintegral über das sphärische Dreieck ABD der Ausdruck

$$\iint dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda + 1}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta d\lambda = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos\theta\right]_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda+1}}}^{\frac{\pi}{2}} d\lambda.$$

Wandeln wir den Kosinus in einen Sinus um, folgt weiter

$$\iint dS = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 \lambda + 1}} d\lambda = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \lambda d\lambda}{\sqrt{\sin^2 \lambda + 1}} = -R^2 \int_1^0 \frac{d \cos \lambda}{\sqrt{2 - \cos^2 \lambda}}.$$

Die Oberfläche der Sechzehntelsphäre ergibt sich also zu

$$S = R^2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = R^2 \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = R^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

Aufgrund der Definition des Schwerpunkts in Kugelkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{S}\int_K x dS = \frac{R^3 \iint_K \sin^2 \theta d\theta \cos\lambda d\lambda}{R^2 \iint_K \sin \theta d\theta d\lambda}, \quad y_s = \frac{1}{S}\int_K y dS = \frac{R^3 \iint_K \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda}{R^2 \iint_K \sin \theta d\theta d\lambda}$$

muß nach Einsetzen der Orthodromengleichung für beide Koordinaten

$$x_s = \frac{4}{\pi} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda+1}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \cos\lambda d\lambda, \quad y_s = \frac{4}{\pi} R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda+1}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \sin \lambda d\lambda$$

das gleiche Integral über die untere Grenzkurve ausgewertet werden:

$$\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda+1}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \sin\theta\sqrt{1 - \sin^2 \theta}\right]_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda+1}}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \lambda + 1}} + \frac{1}{2}\frac{\sin \lambda}{\sin^2 \lambda + 1}.$$

Damit ergibt sich für die x-Komponente

$$x_s = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\lambda d\lambda - \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2\lambda+1}}\cos\lambda d\lambda + \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda}{\sin^2\lambda+1}\cos\lambda d\lambda$$

und für die y-Komponente

$$y_s = R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\lambda d\lambda - \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\sin^2\lambda+1}}\right]\sin\lambda d\lambda + \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\lambda}{\sin^2\lambda+1}\sin\lambda d\lambda.$$

Mit den Substitution

$$\lambda = \arcsin x, \quad d\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

reduziert sich die x-Komponente auf die Auswertung der beiden Teilintegrale in dem Ausdruck

$$x_s = R - \frac{2}{\pi}R\int_0^1 \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx + \frac{2}{\pi}R\int_0^1\frac{xdx}{x^2+1},$$

wobei des erste Integral einfach zu lösen ist,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2,$$

und für das zweite Integral die Umformung

$$\int_0^1 \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \arctan\frac{1}{x}dx$$

vorgenommen werden muß. Substituieren wir

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{bzw.} \quad dx = -\frac{1}{y^2}dy,$$

folgt weiter

$$\int_0^1 \arctan\frac{1}{x}dx = -\int_\infty^1 \frac{\arctan y}{y^2}dy = \int_1^\infty \frac{\arctan y}{y^2}dy = \left[-\frac{1}{y}\arctan y - \frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{y^2}\right]_1^\infty = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

Damit lautet der gesuchte Schwerpunkt

$$x_s = R - \left(\frac{1}{2}R + \frac{\ln 2}{\pi}R\right) + \frac{\ln 2}{\pi}R = \frac{1}{2}R.$$

Die y-Komponente formen wir mittels partieller Integration gemäß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\sin^2\lambda+1}}\right]\sin\lambda d\lambda = \left[-\cos\lambda \arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2\lambda+1}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\lambda}{\sin^2\lambda+1}\cos\lambda d\lambda$$

um, womit sich die Integration auf ein einziges Integral reduziert:

$$y_s = \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda+1}d\lambda + \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\lambda}{\sin^2\lambda+1}d\lambda = \frac{2}{\pi}R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\lambda+1}d\lambda.$$

Mit dem Ergebnis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2\lambda+1}d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arcsin\frac{3\sin^2\lambda-1}{\sin^2\lambda+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ergibt sich der Schwerpunkt auf der y-Achse zu

$$y_s = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Die z-Koordinate erhalten wir schließlich aus der Kugelgleichung

$$z_s = \sqrt{R^2 - x_s^2 - y_s^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{2}.$$

Fassen wir alle drei Koordinaten noch einmal zusammen, so liegt der Schwerpunkt der Sechzehntelsphäre bei

$$(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{2}\right).$$

Die Winkelwerte des Schwerpunkts sind gegeben durch

$$\lambda_s = \arctan\frac{y_s}{x_s} = \arctan\sqrt{2}, \quad \theta_s = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden mit dem Meridian $\lambda = \pi/4$ erhalten wir den Wert

$$\theta(\pi/4) = \arcsin\frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{4}+1}} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} = \arctan\sqrt{2},$$

d.h. alle Orthodromen schneiden sich genau in einem Punkt, dem Schwerpunkt.

