Aufgabe: Leiten Sie die Gleichung einer Orthodrome in Kugelkoordinaten her.

Lösung: Jede Orthodrome ist Teil eines gleichschenkeligen Dreiecks mit $\beta = \gamma = 90°$ und schneidet den Äquator im Punkt A unter dem konstanten Winkel α wie in Abb. 1 dargestellt.

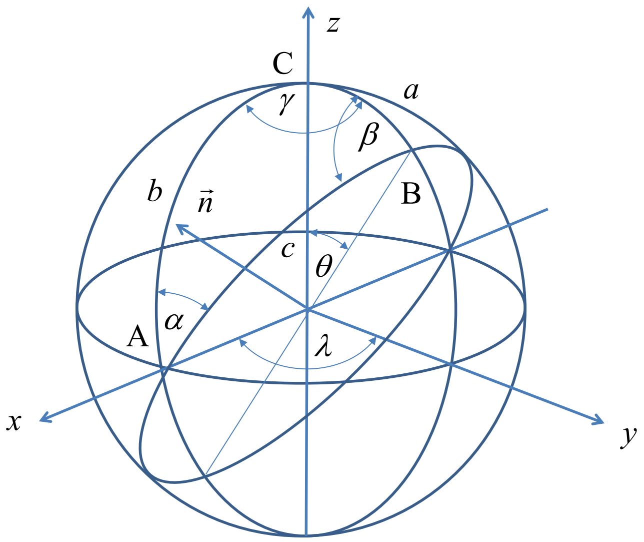

Abbildung 1. Die Orthodrome als Schnittmenge einer Ebene durch den Nullpunkt mit der Kugel

Die Bogenlänge b ist dabei $(\pi/2)R$, wobei R der Kugelradius ist. Seien die auf dem Kreisbogen zwischen A und B gelegenen Punkte B_1 und B_1 sowie der Ursprung die drei die Orthodrome definierenden Punkte, deren Koordinaten gegeben sind durch

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\theta_1\cos\lambda_1, & y_1 &= R\sin\theta_1\sin\lambda_1, & z_1 &= R\cos\theta_1 \\ x_2 &= R\sin\theta_2\cos\lambda_2, & y_2 &= R\sin\theta_2\sin\lambda_2, & z_2 &= R\cos\theta_2 \\ x_3 &= 0, & y_3 &= 0, & z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt A mit dem Äquator habe die Koordinaten

$$x_0 = R\sin\theta_0\cos\lambda_0 = R\cos\lambda_0, \quad y_0 = R\sin\theta_0\sin\lambda_0 = R\sin\lambda_0, \quad z_0 = R\cos\theta_0 = 0,$$

und im Punkt B gelte

$$x_4 = R\sin\theta_4\cos\left(\lambda_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad y_3 = R\sin\theta_4\sin\left(\lambda_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad z_4 = R\cos\theta_4.$$

Der Nordpol im Punkt C habe schließlich die Koordinaten

$$x_5 = R\sin\theta_5\cos\lambda_5 = 0, \quad y_5 = R\sin\theta_5\sin\lambda_5 = 0, \quad z_5 = R\cos\theta_5 = R.$$

Gesucht werden nun die Komponenten

$$x = R\sin\theta\cos\lambda, \quad y = R\sin\theta\sin\lambda, \quad z = R\cos\theta$$

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

eines Vektors $\mathrm{P}(x, y, z)$ auf der Orthodromen mit den Längen- und Breitenangaben[1]

$$\lambda = \arctan\frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}}.$$

Auf dem gegebenen sphärischen Dreieck gelten für Zentriwinkel die Relationen

$$\frac{a}{R} = \theta, \quad \frac{b}{R} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{c}{R} = \arccos(\sin\theta\cos(\lambda-\lambda_0)).$$

Der Winkel α ist stets konstant und berechnet sich aus dem Kosinussatz für $b = c$:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a_4}{R} - \cos^2\frac{b}{R}}{\sin^2\frac{b}{R}} = \cos\theta_4,$$

Für die weitere Berechnung benötigen wir das Skalarprodukt des Normalenvektors $\vec{n}$ mit der z-Achse, i.e.

$$\vec{n}\cdot\vec{e}_z = |\vec{n}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_4\right) = \sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}\,\sin\theta_4,$$

woraus

$$\alpha = \theta_4 = \arcsin\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}} \quad \text{bzw.} \quad \sin\alpha = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$$

folgt. Den Winkel im Punkt C berechnen wir nach dem Winkelkosinussatz:

$$\cos\gamma = -\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2}\cos(\lambda-\lambda_0) = \cos(\lambda-\lambda_0),$$

und für den Winkel im Punkt B erhalten wir schließlich

$$\cos\beta = \frac{\cos\frac{b}{R} - \cos\frac{a}{R}\cos\frac{c}{R}}{\sin\frac{a}{R}\sin\frac{c}{R}} = -\frac{\cos\theta\cos(\lambda-\lambda_0)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2(\lambda-\lambda_0)}}.$$

Setzen wir

$$\sin\frac{c}{R} = \sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2(\lambda-\lambda_0)} \quad \text{und} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}{\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}}$$

[1] Der Polarwinkel läßt sich trivialerweise als Komplementärwinkel der Breite angeben.

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

in den Seitenkosinussatz

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha$$

ein, so folgt wegen $b = (\pi/2)R$ der Ausdruck

$$\cos\frac{a}{R} = \sin\frac{c}{R}\cos\alpha = \frac{\sqrt{n_x^2 + n_y^2}}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2(\lambda - \lambda_0)}.$$

Quadrieren der Gleichung führt auf

$$1 - \sin^2\theta = \frac{n_x^2 + n_y^2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\left(1 - \sin^2\theta\cos^2(\lambda - \lambda_0)\right),$$

und nach Zusammenfassung der Sinusterme folgt

$$\frac{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - (n_x^2 + n_y^2)\cos^2(\lambda - \lambda_0)}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\sin^2\theta = \frac{n_z^2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}.$$

Nach Kürzen des Nenners und Umformung ergibt sich ein separierbarer Ausdruck für den Polarwinkel, der außer von der geographischen Länge nur von konstanten Größen abhängt:

$$\sin^2\theta = \frac{n_z^2}{(n_x^2 + n_y^2)\sin^2(\lambda - \lambda_0) + n_z^2}.$$

Dies liefert uns den gewünschten Ausdruck für die Längenabhängigkeit der Orthodrome:

$$\theta(\lambda) = \arcsin\frac{n_z}{\sqrt{(n_x^2 + n_y^2)\sin^2(\lambda - \lambda_0) + n_z^2}}.$$

Im Spezialfall $\lambda = \lambda_0$ schneidet die Orthodrome den Äquator bei

$$\theta(\lambda_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Nach einer Vierteldrehung erreicht sie ihren Zenit im Punkt B:

$$\theta\left(\lambda_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin\frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = \arcsin\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_4\right)\right] = \theta_4.$$

Nun müssen wir noch den Normalenvektor aus den drei Bestimmungspunkten

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (R\sin\theta_1\cos\lambda_1, R\sin\theta_1\sin\lambda_1, R\cos\theta_1),$$
$$\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) = (R\sin\theta_2\cos\lambda_2, R\sin\theta_2\sin\lambda_2, R\cos\theta_2),$$
$$\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3) = (0, 0, 0)$$

berechnen. Zunächst leiten wir mittels der Determinante

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

die Ebenengleichung her. Setzen wir die drei gegebenen Punkte ein, erhalten wir als Lösung den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} x-R\sin\theta_1\cos\lambda_1 & y-R\sin\theta_1\sin\lambda_1 & z-R\cos\theta_1 \\ R(\sin\theta_2\cos\lambda_2-\sin\theta_1\cos\lambda_1) & R(\sin\theta_2\sin\lambda_2-\sin\theta_1\sin\lambda_1) & R(\cos\theta_2-\cos\theta_1) \\ -R\sin\theta_1\cos\lambda_1 & -R\sin\theta_1\sin\lambda_1 & -R\cos\theta_1 \end{vmatrix} \\
&= R^2x(\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\lambda_1-\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\lambda_2) \\
&+ R^2y(\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\lambda_2-\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\lambda_1) \\
&+ R^2z\sin\theta_2\sin\theta_1(\sin\lambda_2\cos\lambda_1-\cos\lambda_2\sin\lambda_1).
\end{aligned}$$

Nach Kürzen des Radius ergibt sich die Ebenengleichung

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\lambda_1-\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\lambda_2)x+(\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\lambda_2-\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\lambda_1)y \\
&+\sin\theta_2\sin\theta_1\sin(\lambda_2-\lambda_1)z = 0,
\end{aligned}$$

wobei der Normalenvektor gegeben ist durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2-z_1y_2 \\ z_1x_2-x_1z_2 \\ x_1y_2-y_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta_2\cos\theta_1\sin\lambda_2+\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\lambda_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1\cos\lambda_2-\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\lambda_1 \\ \sin\theta_2\sin\theta_1\sin(\lambda_2-\lambda_1) \end{pmatrix}.$$

Sein Betrag lautet

$$\begin{aligned}
\|\vec{n}\|^2 &= \sin^2\theta_2\cos^2\theta_1-2\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\cos(\lambda_2-\lambda_1)+\cos^2\theta_2\sin^2\theta_1 \\
&+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_1\sin^2(\lambda_2-\lambda_1).
\end{aligned}$$

Falls $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ zwei Punkte sind, die längenmäßig um 90° auseinanderliegen, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\|\vec{n}\| = \sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2\sin^2\theta_1.$$

Der Durchstoßpunkt durch den Äquator liegt auf dem Längengrad

$$\lambda_0 = \arctan\frac{\tan\theta_1\sin\lambda_1-\tan\theta_2\sin\lambda_2}{\tan\theta_1\cos\lambda_1-\tan\theta_2\cos\lambda_2}.$$

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

In jedem Fall ist es damit möglich, die oberen und unteren Integrationsgrenzen eines beliebigen sphärischen Dreiecks anzugeben.

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.