

# Mathematikaufgabe 119

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Beweisen Sie, daß der Oberflächenschwerpunkt eines allgemeinen Kugeldreiecks nicht mit dem Schnittpunkt der drei Seiten- bzw. Winkelhalbierenden übereinstimmt.

**Beweis:** Wir führen den Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit am Beispiel der in Abb. 1 dargestellten Achtelsphäre durch, die einem gleichseitigen Kugeldreieck entspricht.

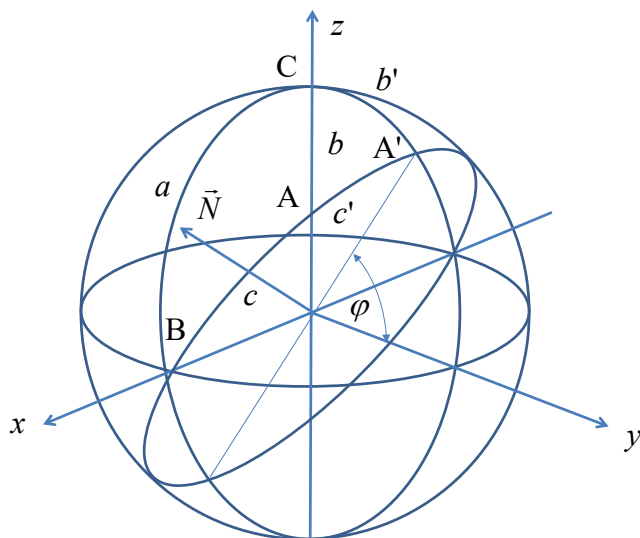


Abbildung 1. Schnittpunkt zweier Seitenhalbierender im gleichseitigen rechtwinkligen Kugeldreieck

Im Dreieck  $A'BC$  gelten die Relationen

$$\frac{a'}{R} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{b'}{R} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{c'}{R} = \frac{\pi}{2},$$
$$\alpha' = \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma' = \frac{\pi}{2},$$

und im Dreieck  $ABC$  sind zwei der insgesamt 6 Winkelgrößen unbekannt:

$$\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{b}{R} = \frac{c}{R}, \quad \frac{c}{R} = ?$$
$$\alpha = ? \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

Nach dem Seitenkosinussatz folgt mit den obigen Werten

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + \sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R} \cos \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \frac{c}{R}$$

bzw.

$$\tan \frac{c}{R} = \sqrt{2}.$$

Der Winkel  $\alpha$  ergibt sich eindeutig aus dem Kosinussatz

## Mathematikaufgabe 119

---

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R}}{\sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R}} = -\frac{1}{\tan^2 \frac{c}{R}} = -\frac{1}{2}$$

zu  $\alpha = 120^\circ$ . Somit ist das Dreieck ABC vollständig beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{a}{R} &= \frac{\pi}{2}, & \frac{b}{R} &= \arctan \sqrt{2}, & \frac{c}{R} &= \arctan \sqrt{2}, \\ \alpha &= \frac{2\pi}{3}, & \beta &= \frac{\pi}{4}, & \gamma &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Größen kann nun der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden bestimmt werden. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \rho_s &= \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = R \sin \frac{b}{R} = R \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{1 + \tan^2 \arctan \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}, \\ z_s &= R \cos \frac{b}{R} = \frac{R}{\sqrt{1 + \tan^2 \arctan \sqrt{2}}} = \frac{R}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

mit

$$x_s = \rho_s \cos \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad y_s = \rho_s \sin \frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Daraus folgt

$$\lambda_s = \arctan \frac{y_s}{x_s} = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_s = \arctan \cot \frac{b}{R} = \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{2}.$$

Die Seiten- sprich Winkelhalbierenden schneiden sich also im Verhältnis

$$\frac{\frac{b}{R}}{\frac{\pi}{2} - \frac{b}{R}} = \frac{\frac{c}{R}}{\frac{\pi}{2} - \frac{c}{R}} = \frac{\arctan \sqrt{2}}{\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{2}} = \frac{2}{\frac{\pi}{\arctan \sqrt{2}} - 2} = 2 : 1,29,$$

weil  $\arctan \sqrt{2} < \frac{\pi}{3}$  ist.

Beim sphärischen Dreieck gilt also nicht wie beim gewöhnlichen ebenen Dreieck, daß sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt schneiden. Die Schwerpunktkoordinaten der Achtersphäre sind nämlich in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$x_s = y_s = \frac{R}{2}, \quad z_s = \sqrt{R^2 - 2x_s^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

und haben in sphärischen Koordinaten folgende Längen und Breiten:

$$\lambda_s = \arctan \frac{y_s}{x_s} = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_s = \arctan \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Wir schneiden zur Probe zwei der drei Orthodromen. Zunächst ist die Diagonalebene gegeben durch die drei Punkte

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 1), \\ \vec{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, -1), \\ \vec{r}_3 &= (x_3, y_3, z_3) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)\end{aligned}$$

und hat die Ebenengleichung

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}y + \sqrt{2}x = 0$$

bzw.  $x - y = 0$ . Der Normalenvektor ist gegeben durch

$$\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit besitzt die Orthodrome in der Diagonalebene des ersten und dritten Quadranten senkrecht zur  $x$ - $y$ -Ebene die Ellipsengleichung

$$\frac{2x^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{2y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1,$$

wobei die große Halbachse in  $z$ -Richtung und die kleine in  $x$ - oder  $y$ -Richtung zeigt und die Länge  $R/\sqrt{2}$  hat.

Die Ebene der Seitenhalbierenden senkrecht zur  $y$ - $z$ -Ebene ist gegeben durch die drei Punkte

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 0), \\ \vec{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (-1, 0, 0), \\ \vec{r}_3 &= (x_3, y_3, z_3) = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

und hat die Ebenengleichung

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2}z + \sqrt{2}y = 0$$

bzw.  $z - y = 0$ . Der Normalenvektor ist gegeben durch

$$\vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit besitzt die Orthodrome in der Ebene der Seitenhalbierenden senkrecht zur  $y$ - $z$ -Ebene die Ellipsengleichungen

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{2z^2}{R^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{2y^2}{R^2} = 1,$$

wobei die große Halbachse in  $x$ -Richtung und die kleine in  $y$ - oder  $z$ -Richtung zeigt und ebenfalls die Länge  $R/\sqrt{2}$  hat.

Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten halbierenden Geodäten ergeben sich durch Eliminierung der  $z$ -Koordinate und anschließende Eliminierung der  $x$ -Koordinate zu

$$x_s = y_s = z_s = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

In sphärischen Koordinaten lauten die Längen- und Breitengrade des Schnittpunktes dann

$$\lambda_s = \arctan \frac{y_s}{x_s} = 45^\circ, \quad \varphi_s = \arctan \frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} = \arctan \frac{1}{2}\sqrt{2} = \arctan \sin \frac{\pi}{4} = 35,26^\circ.$$

Für kleine Winkel  $x$  ist die Näherung  $\sin x \approx \tan x$  zulässig, und damit wäre

$$\varphi_s = \arctan \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

wie in der ebenen Trigonometrie. Allerdings entspricht eine Breite von  $45^\circ$  einem Bogenmaß von  $0,785$ , und dieser Wert ist für eine Näherung eindeutig zu groß. Für niedere Breiten allerdings mit  $z_s \ll 1$  geht die sphärische Trigonometrie in die ebene über und die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 2:1.

Während die Länge also mit dem Schwerpunkt übereinstimmt, weicht die Breite doch signifikant davon ab, und zwar um etwa  $10^\circ$ . Die Annahme der ebenen Trigonometrie, daß sich die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, läßt sich also nicht ohne weiteres auf die sphärische übertragen, qed.