Aufgabe: Leiten Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes der Winkelhalbierenden durch den Kreis her.

Lösung: Gegeben seien zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf einem Kreis mit Radius R wie in Abb. 1 dargestellt.

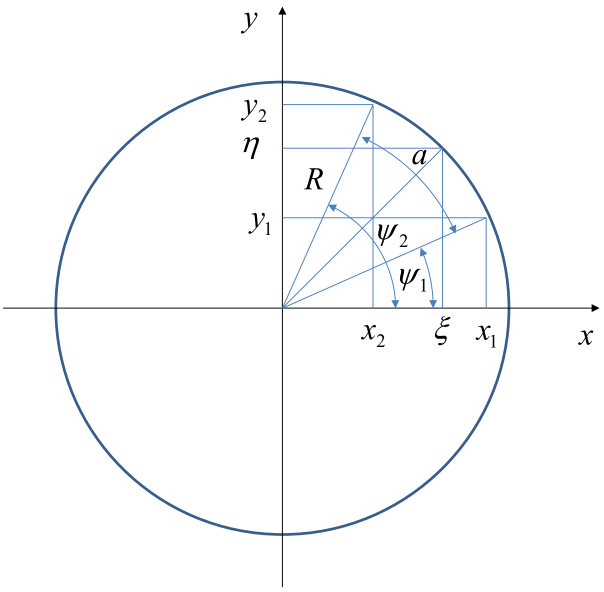

Abbildung 1. Geometrie zur Bestimmung des Durchstoßpunktes der Winkelhalbierenden durch den Kreis

Dabei gelten die Koordinatengleichungen

$$x_1 = R\cos\psi_1, \quad y_1 = R\sin\psi_1,$$
$$x_2 = R\cos\psi_2, \quad y_2 = R\sin\psi_2,$$

wobei ψ_1 und ψ_2 die Winkel sind, welche die Ortsvektoren mit der x-Achse einschließen. Gesucht sind nun die Koordinaten (ξ, η) des Durchstoßpunktes, welchen die Winkelhalbierende

$$\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

mit dem Kreis schneidet. Zunächst gilt für die Koordinatendifferenzen aufgrund der entsprechenden trigonometrischen Beziehungen

$$x_1 - x_2 = R(\cos\psi_1 - \cos\psi_2) = 2R\sin\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\sin\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} = 2R\sin\psi\sin\frac{a}{2},$$
$$y_2 - y_1 = R(\sin\psi_2 - \sin\psi_1) = 2R\cos\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\sin\frac{\psi_2 - \psi_1}{2} = 2R\cos\psi\sin\frac{a}{2},$$

woraus sich durch Division die Bestimmungsgleichung der Winkelhalbierenden ergibt:

$$\psi \equiv \arctan\frac{\eta}{\xi} = \arctan\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}.$$

Damit ergeben sich die Koordinaten des Durchstoßpunktes im ersten Quadranten wie folgt:

$$\xi = R\cos\psi = R\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = R\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}},$$
$$\eta = R\sin\psi = R\frac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = R\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}},$$

wobei

$$R = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{\xi^2+\eta^2}.$$

In den anderen Quadranten ist das entsprechende Vorzeichen zu berücksichtigen. Die Winkelhalbierende zeigt also in Richtung des Normalenvektors zum Differenzvektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ mit dem Betrage

$$\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}.$$