Aufgabe: Berechnen Sie den Flächenschwerpunkt einer Viertel- und Achtelsphäre in kartesischen und sphärischen Koordinaten. Zeigen Sie, daß sich die Schwerpunkte zweier sphärischer Dreiecke nur in kartesischen Koordinaten zu Mittelwerten addieren lassen.

Lösung: Der Schwerpunkt einer Fläche ist definiert durch

$$x_s = \frac{1}{S}\int_S x\,dS = \frac{\iint_S x\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}, \quad y_s = \frac{1}{S}\int_S y\,dS = \frac{\iint_S y\,dx\,dy}{\iint_S dx\,dy}.$$

Aufgrund der Kugelgleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

liegt die Fläche S als Funktion von x und y vor:

$$z(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Damit läßt sich der Schwerpunkt eines sphärischen Dreiecks als Oberflächenintegral erster Art berechnen:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS \equiv \iint_K f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

wobei

$$S = \iint_S dS = \iint_K \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$
$$x_s = \frac{1}{S}\iint_S x\,dS = \frac{1}{S}\iint_K x\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$
$$y_s = \frac{1}{S}\iint_S y\,dS = \frac{1}{S}\iint_K y\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Die Achtelsphäre des ersten Quadranten hat damit die Oberfläche

$$S = R\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_0^R \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}R^2.$$

Ferner sind die x- und y-Koordinate gegeben durch

$$R\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{xdydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_0^R \left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xdx = \frac{\pi}{2}R\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}R^3$$

und

$$R\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{ydydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -R\int_0^R \left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = R\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}R\left[x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right]_0^R = \frac{1}{4}\pi R^3,$$

womit sich ein symmetrischer Schwerpunkt auf dem 45. Breiten- und Längengrad ergibt:

$$x_s = y_s = \frac{R}{2}, \quad z_s = \sqrt{R^2 - 2x_s^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Dieser ist in Grund- und Seitenriß in Abb. 1 dargestellt.

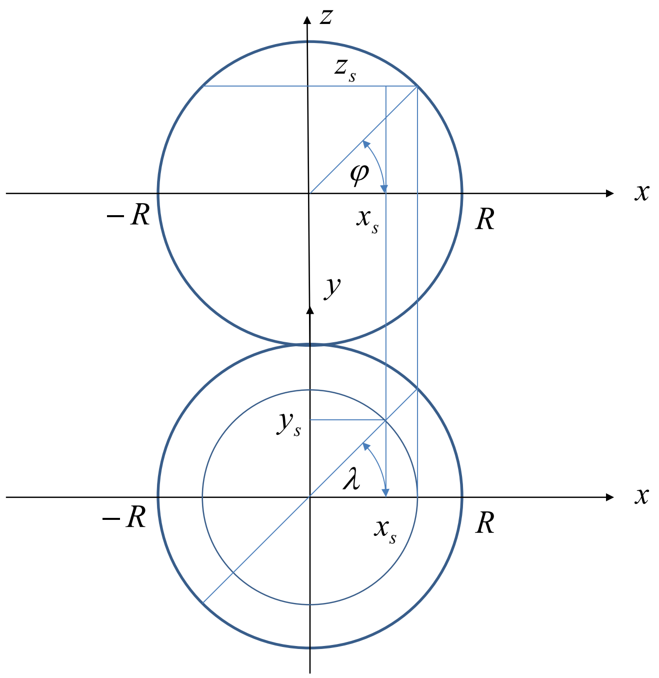

Abbildung 1. Grund- und Seitenriß der Achtelsphäre mit eingezeichnetem 45. Längen- und Breitenkreis

Für die Viertelsphäre des ersten und zweiten Quadranten gilt

$$S = R\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_{-R}^{R}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \pi R^2$$

sowie

$$R\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{xdydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = R\int_{-R}^{R}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xdx = \frac{\pi}{2}R\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = 0$$

und

$$R\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{ydydx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -R\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = R\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}R\left[x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R} = \frac{1}{2}\pi R^3.$$

Das liefert den Oberflächenschwerpunkt bei

$$x_s = 0, \quad y_s = \frac{1}{2}R, \quad z_s = \sqrt{R^2 - x_s^2 - y_s^2} = \sqrt{3}\frac{R}{2},$$

der in sphärischen Koordinaten auf dem 90. Längen- und dem 60. Breitengrad liegt:

$$\lambda_s = \arctan\frac{y_s}{x_s} = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_s = \arctan\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2+y_s^2}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Grund- und Seitenriß sind in Abb. 2 dargestellt.

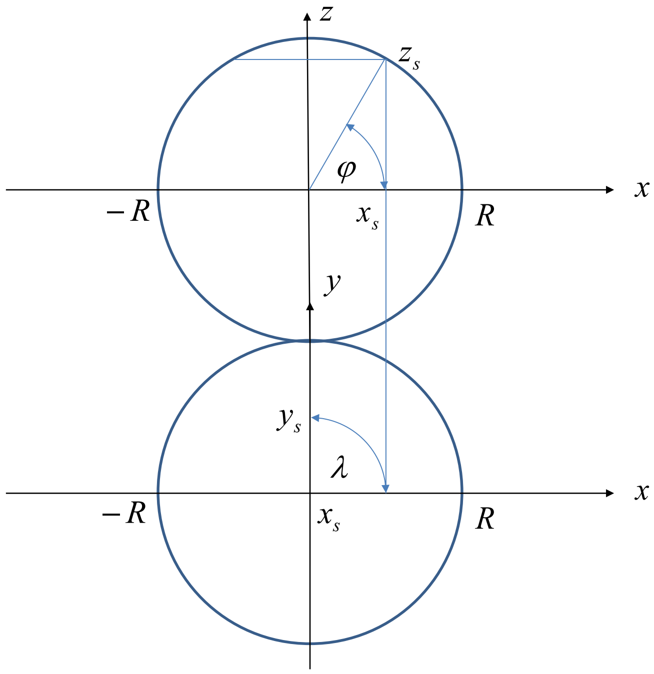

Abbildung 2. Grund- und Seitenriß der Viertelsphäre mit 90. Längen- und 60. Breitenkreis

Aus Symmetriegründen muß die x-Komponente verschwinden. Wir zeigen nun, daß sich die Schwerpunkte zweier Achtelsphären zum Schwerpunkt einer Viertelsphäre ergänzen. Die beiden Achtelsphären haben einzeln die Schwerpunktkoordinaten

$$x_s^{(1)} = \frac{R}{2}, \quad y_s^{(1)} = \frac{R}{2}, \quad z_s^{(1)} = \frac{R}{\sqrt{2}},$$
$$x_s^{(2)} = -\frac{R}{2}, \quad y_s^{(2)} = \frac{R}{2}, \quad z_s^{(2)} = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

die in sphärischen Koordinaten den folgenden Längen und Breiten entsprechen:

$$\lambda_s^{(1)} = \arctan\frac{y_s^{(1)}}{x_s^{(1)}} = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_s^{(1)} = \arctan\frac{z_s^{(1)}}{\sqrt{\left(x_s^{(1)}\right)^2 + \left(y_s^{(1)}\right)^2}} = \frac{\pi}{4},$$

bzw.

$$\lambda_s^{(2)} = \arctan\frac{y_s^{(2)}}{x_s^{(2)}} = -\frac{\pi}{4}, \quad \varphi_s^{(2)} = \arctan\frac{z_s^{(2)}}{\sqrt{\left(x_s^{(2)}\right)^2 + \left(y_s^{(2)}\right)^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Wie man leicht sieht, addieren sich die x- und y-Koordinaten zum Schwerpunkt einer Viertelsphäre:

$$x_s = \frac{x_s^{(1)} + x_s^{(2)}}{2} = 0 \quad y_s = \frac{y_s^{(1)} + y_s^{(2)}}{2} = \frac{R}{2} \quad z_s = \sqrt{R^2 - x_s^2 - y_s^2} = \sqrt{3}\,\frac{R}{2}.$$

Bei der Schwerpunktbestimmung zeigt es sich, daß wir die x- und y-Komponenten der einzelnen Schwerpunkte arithmetisch mitteln müssen, um den Gesamtschwerpunkt zu erhalten. Die z-Komponenten hingegen müssen jeweils einzeln berechnet werden und auf der Kugeloberfläche liegen.

Wir führen nachfolgend zur Kontrolle die Berechnung in Kugelkoordinaten durch. Mit den krummlinigen Koordinaten λ und φ für die geographische Länge und Breite, die mit den kartesischen Koordinaten x, y und z wie folgt zusammenhängen:

$$x = R\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = R\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = R\sin\varphi,$$

lauten die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien:

$$\mathbf{r}_\lambda = \frac{\partial x}{\partial\lambda}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{r}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\mathbf{e}_z.$$

Damit ergibt sich als Flächeninhalt auf dem sphärischen Dreieck

$$\iint dS = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\,d\lambda d\varphi = R^2 \iint_\Delta \cos\varphi\, d\lambda d\varphi,$$

wobei die Koeffizienten der Funktionaldeterminante gegeben sind durch

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2=R^2\cos^2\varphi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2$$

und

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)=0.$$

Damit läßt sich die Oberfläche der Achtelsphäre wesentlich einfacher berechnen als in kartesischen Koordinaten:

$$S=R^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi d\lambda=\frac{\pi}{2}R^2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2}R^2[\sin\varphi]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}R^2,$$

während wir für die Oberfläche der Viertelsphäre den bereits bekannten Wert

$$S=R^2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi d\lambda=\pi R^2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi=\pi R^2[\sin\varphi]_0^{\pi/2}=\pi R^2$$

erhalten. Aufgrund der Definition des Schwerpunkts in Kugelkoordinaten haben wir die Integrale

$$x_s=\frac{1}{S}\int_K xdS=\frac{R^3\iint_K\cos^2\varphi d\varphi\cos\lambda d\lambda}{R^2\iint_K\cos\varphi d\varphi d\lambda},\quad y_s=\frac{1}{S}\int_K ydS=\frac{R^3\iint_K\cos^2\varphi d\varphi\sin\lambda d\lambda}{R^2\iint_K\cos\varphi d\varphi d\lambda}$$

auszuwerten. Für die Achtelsphäre ist die x-Komponente des Schwerpunktintegrals gegeben durch

$$R^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi\cos\lambda d\lambda=R^3[\sin\lambda]_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{4}\pi R^3,$$

und die y-Komponente lautet:

$$R^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi\sin\lambda d\lambda=R^3[-\cos\lambda]_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{4}\pi R^3.$$

Daraus ergeben sich die gleichen Schwerpunktkoordinaten wie in der kartesischen Berechnung, was heißt, daß unsere Rechnung stimmt:

$$x_s = y_s = \frac{R}{2}, \quad z_s = \sqrt{R^2 - 2x_s^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Für die Viertelsphäre ist die x-Komponente des Schwerpunktintegrals gegeben durch

$$R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \cos \lambda d\lambda = R^3 [\sin \lambda]_0^{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 0,$$

und die y-Komponente lautet:

$$R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \sin \lambda d\lambda = R^3 [-\cos \lambda]_0^{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^3,$$

womit sich auch hier die alten Werte ergeben:

$$x_s = 0, \quad y_s = \frac{1}{2} R, \quad z_s = \sqrt{R^2 - x_s^2 - y_s^2} = \sqrt{3} \frac{R}{2}.$$

Grundsätzlich ist die Berechnung der Oberflächenintegrale erster Art in Kugelkoordinaten einfacher, jedoch auch dann kommen wir nicht umhin, für die Addition der Schwerpunkte kartesische Koordinaten zu verwenden. Anschließend müssen wir das Ergebnis der Mittelwertbildung wieder zurück in Kugelkoordinaten transformieren.[1]

[1] Wenn wir wissen wollen, wo der Schwerpunkt in geographischen Koordinaten liegt

