Aufgabe: Transformieren Sie einen beliebigen Punkt auf einer geodätischen Kurve in ein kartesisches Koordinatensystem zurück.

Lösung: Wir transformieren zunächst die Gleichung einer geodätischen Kurve in einem kartesischen (x,y,z)-Koordinatensystem durch Drehung um die z-Achse in ein Hauptachsensystem (X,Y,Z) und kippen dieses dann in einer weiteren Drehung um die große Halbachse, auf der der Radius abgetragen ist, bis die geodätische Kurve in der X_1Y_1-Ebene des dreidimensionalen Raums (X_1,Y_1,Z_1) einen Großkreis mit $Z_1=0$ darstellt. Im System der Hauptachsen möge die Geodätische eine Ellipse der Form

$$1=\frac{X^2}{R^2}+\frac{Y^2}{R^2\cos^2\zeta}\quad\text{oder}\quad 1=\frac{X^2}{R^2\cos^2\zeta}+\frac{Y^2}{R^2}$$

darstellen, wobei ζ den Richtungskosinus des Normalenvektors zur Ebene, in der die Geodätische liegt, mit der z-Richtung angibt. Diese Gleichung erhalten wir, wenn wir einen Punkt der Geodätischen mit den Koordinaten x, y und z um den Winkel

$$\Phi=\frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{12}b_{12}}{a_{12}^2-b_{12}^2}$$

in eine der beiden Halbachsen drehen, wobei sich die Komponenten des Normalenvektors zur Schnittebene, in der die Geodätische liegt, wie folgt berechnen:

$$\vec{n}_{12}=\vec{r}_1\times\vec{r}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ b_{12}\\ c_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1z_2-z_1y_2\\ z_1x_2-x_1z_2\\ x_1y_2-y_1x_2\end{pmatrix}.$$

Die z-Koordinate wird bei einer Drehung um die z-Achse, die durch die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix}\cos\Phi & -\sin\Phi & 0\\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

vermittelt wird, nicht verändert, womit die Transformationsgleichungen auf Hauptachsen lauten:

$$x=X\cos\Phi-Y\sin\Phi,$$
$$y=X\sin\Phi+Y\cos\Phi,$$
$$z=Z.$$

Falls die X-Achse die große Hauptachse ist, folgt in einer weiteren Drehung um diese Achse die Transformation in ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen X_1, Y_1 und Z_1, wobei die Rotationsmatrix dieser Drehung um den Winkel Θ gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

Die daraus resultierenden Transformationsgleichungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} X &= X_1, \\ Y &= Y_1 \cos\Theta - Z_1 \sin\Theta, \\ Z &= Y_1 \sin\Theta + Z_1 \cos\Theta, \end{aligned}$$

womit sich die Gesamttransformation schließlich aus einer Matrizenmultiplikation zusammensetzt,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\cos\Theta\sin\Phi & \sin\Theta\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi & -\sin\Theta\cos\Phi \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die vollständigen Transformationsgleichungen sehen also wie folgt aus:

$$\begin{aligned} x &= X_1 \cos\Phi - Y_1 \cos\Theta \sin\Phi + Z_1 \sin\Theta \sin\Phi, \\ y &= X_1 \sin\Phi + Y_1 \cos\Theta \cos\Phi - Z_1 \sin\Theta \cos\Phi, \\ z &= Y_1 \sin\Theta + Z_1 \cos\Theta, \end{aligned}$$

wobei die inverse Transformation hierzu lautet:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhalten wir als Lösung eine Matrixgleichung der Form

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi\cos\Theta & \cos\Phi\cos\Theta & \sin\Theta \\ \sin\Phi\sin\Theta & -\cos\Phi\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} X_1 &= x\cos\Phi + y\sin\Phi, \\ Y_1 &= -x\cos\Theta\sin\Phi + y\cos\Theta\cos\Phi + z\sin\Theta, \\ Z_1 &= x\sin\Theta\sin\Phi - y\sin\Theta\cos\Phi + z\cos\Theta. \end{aligned}$$

Bilden wir zur Probe die Quadrate

$$\begin{aligned} X_1^2 &= (x\cos\Phi + y\sin\Phi)^2, \\ Y_1^2 &= ((x\sin\Phi - y\cos\Phi)\cos\Theta - z\sin\Theta)^2, \\ Z_1^2 &= ((x\sin\Phi - y\cos\Phi)\sin\Theta + z\cos\Theta)^2 \end{aligned}$$

und multiplizieren diese aus, folgt schließlich eine ganz gewöhnliche Sphärengleichung

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = (x\cos\Phi + y\sin\Phi)^2 + (x\sin\Phi - y\cos\Phi)^2 + z^2 = R^2.$$

Das gleiche gilt für die Rücktransformation. Hier erhalten wir nach Bildung der Quadrate

$$\begin{aligned} x^2 &= X_1^2\cos^2\Phi - 2X_1(Y_1\cos\Theta - Z_1\sin\Theta)\sin\Phi\cos\Phi + (Y_1\cos\Theta - Z_1\sin\Theta)^2\sin^2\Phi, \\ y^2 &= X_1^2\sin^2\Phi + 2X_1(Y_1\cos\Theta - Z_1\sin\Theta)\cos\Phi\sin\Phi + (Y_1\cos\Theta - Z_1\sin\Theta)^2\cos^2\Phi, \\ z^2 &= (Y_1\sin\Theta + Z_1\cos\Theta)^2 \end{aligned}$$

und deren Addition ebenfalls eine Kugelgleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = X_1^2 + (Y_1\cos\Theta - Z_1\sin\Theta)^2 + (Y_1\sin\Theta + Z_1\cos\Theta)^2 = R^2.$$

Setzen wir nun die Sinus- und Kosinus-Relationen

$$\sin\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 - |a_{12}^2 - b_{12}^2|}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}, \quad \cos\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + |a_{12}^2 - b_{12}^2|}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}$$

bzw.

$$\cos\Theta = \frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}, \quad \sin\Theta = \frac{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}$$

in die Z_1-Komponente des geodätischen Systems ein,

$$Z_1 = x\sin\Theta\sin\Phi - y\sin\Theta\cos\Phi + z\cos\Theta,$$

so läßt sich im Falle $a_{12}^2 > b_{12}^2$ mittels der trigonometrischen Funktionen der Azimut-Drehung

$$\sin\Phi = \frac{|b_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}, \quad \cos\Phi = \frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}$$

die Bedingung für das Verschwinden von Z_1 ableiten:

$$Z_1 = x\frac{|b_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} - y\frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + z\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} = 0.$$

Im Falle $b_{12}^2 > a_{12}^2$ gilt

$$\sin\Phi = \frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}, \quad \cos\Phi = \frac{|b_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2}}$$

und somit

$$Z_1 = x\frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} - y\frac{|b_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + z\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}.$$

Dabei ist entweder $a_{12} > 0,$ dann gilt $b_{12} < 0,$ oder $a_{12} < 0,$ dann ist $b_{12} > 0.$ Im ersten Fall ist

$$|a_{12}| = a_{12} \quad \text{und} \quad |b_{12}| = -b_{12},$$

im zweiten

$$|a_{12}| = -a_{12} \quad \text{und} \quad |b_{12}| = b_{12}.$$

Bei letzterem muß die Drehung allerdings im negativen Drehsinn um den Winkel $-\Theta$ erfolgen, und die Z_1-Koordinate hat die Darstellung

$$Z_1 = -x\frac{|a_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + y\frac{|b_{12}|}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + z\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}$$

bzw.

$$Z_1 = x\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + y\frac{b_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}} + z\frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}.$$

Das ist aber genau das Skalarprodukt

$$\frac{\vec{n}_{12} \cdot \vec{e}_z}{|\vec{n}_{12}|} = \cos\Theta = \frac{a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z}{\sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 + c_{12}^2}}.$$

Für einen Punkt auf der z-Achse $x = y = 0$ geht also die Ellipse für $\Theta = \zeta$ in einen Kreis über.

Zur Probe drehen wir einen beliebigen Punkt der Sphäre, der auf der Y_1-Achse zur kleinen Halbachse werden soll, also zu $(X_1, Y_1, Z_1) = (0, 1, 0)$, um den Winkel $\Phi = \pi/4$ um die z-Achse in die Diagonale des ersten Quadranten und drehen ihn dann im mathematisch positiven Drehsinn um den Winkel $\Theta = \pi/4$ um die X-Achse. Diese Transformation können wir rückgängig machen, indem wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in die ursprüngliche Transformationsgleichung einsetzen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\cos\Theta\sin\Phi & \sin\Theta\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi & -\sin\Theta\cos\Phi \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\Theta\sin\Phi \\ \cos\Theta\cos\Phi \\ \sin\Theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Der Ausgangspunkt liegt dann auf der Diagonale des zweiten Quadranten und hat eine positive z-Komponente. Die große Halbachse, d.h. die Halbachse mit dem Radius als Länge, genauer gesagt der entsprechende Punkt auf der X_1-Achse

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wird in den Schnittpunkt des Einheitskreises mit der Diagonale des ersten Quadranten abgebildet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & -\cos\Theta\sin\Phi & \sin\Theta\sin\Phi \\ \sin\Phi & \cos\Theta\cos\Phi & -\sin\Theta\cos\Phi \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir jederzeit zwei Punkte auf einem Großkreis in Punkte eines beliebigen kartesischen Koordinatensystems zurücktransformieren.

