Aufgabe: Bestimmen Sie die geodätischen Linien eines sphärischen Dreiecks als Schnittmenge einer Kugel mit drei nicht zusammenfallenden Ebenen durch den Nullpunkt.

Lösung: Jede Ebene kann eine andere nur in einer Geraden schneiden. Schneiden wir die Schnittgerade je zweier Ebenen mit der Kugel, ergeben sich insgesamt drei Durchstoßpunkte. Die Schnittmenge zwischen je zwei Durchstoßpunkten entspricht dann den 3 geodätischen Linien eines sphärischen Dreiecks.[1] Die Kugel mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung habe also die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Gegeben seien ferner die 3 besagten Durchstoßpunkte durch die Kugeloberfläche

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

die zusammen mit dem Koordinatenursprung die drei Ebenen durch den Nullpunkt aufspannen. Der nicht notwendig normierte Normalenvektor der ersten Ebene ist das Kreuzprodukt aus den Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$, i.e.

$$\vec{n}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ b_{12} \\ c_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix},$$

mit dessen Hilfe wir die Ebenengleichung als das Skalarprodukt aus Ortsvektor und Normalenvektor erhalten:

$$\vec{n}_{12} \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{12}x + b_{12}y + c_{12}z = 0.$$

Durch Substitution von

$$z = -\frac{a_{12}}{c_{12}}x - \frac{b_{12}}{c_{12}}y \quad \text{bzw.} \quad z^2 = \frac{1}{c_{12}^2}(a_{12}x + b_{12}y)^2$$

in der Kugelgleichung ergibt sich eine Kurve zweiter Ordnung:

$$(c_{12}^2 + a_{12}^2)x^2 + 2a_{12}b_{12}xy + (c_{12}^2 + b_{12}^2)y^2 = c_{12}^2 R^2.$$

Für die beiden anderen Ebenen durch die restlichen Paarungen gelten analoge Gleichungen, so daß wir insgesamt folgende 3 Ellipsengleichungen zu lösen haben:

$$\begin{aligned} (c_{12}^2 + a_{12}^2)x^2 + 2a_{12}b_{12}xy + (c_{12}^2 + b_{12}^2)y^2 &= c_{12}^2 R^2 \\ (c_{23}^2 + a_{23}^2)x^2 + 2a_{23}b_{23}xy + (c_{23}^2 + b_{23}^2)y^2 &= c_{23}^2 R^2, \\ (c_{31}^2 + a_{31}^2)x^2 + 2a_{31}b_{31}xy + (c_{31}^2 + b_{31}^2)y^2 &= c_{31}^2 R^2. \end{aligned}$$

[1] In der Ebene wären das die beiden Katheten und die Hypotenuse

Wir transformieren dieses System nun mittels der Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= X\cos\Phi - Y\sin\Phi, \\ y &= X\sin\Phi + Y\cos\Phi \end{aligned}$$

auf Hauptachsen. Die Gleichungen der Rücktransformation lauten:

$$\begin{aligned} X &= x\cos\Phi + y\sin\Phi, \\ Y &= -x\sin\Phi + y\cos\Phi. \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich mit den Notationen

$$\begin{aligned} x^2 &= X^2\cos^2\Phi - 2XY\cos\Phi\sin\Phi + Y^2\sin^2\Phi, \\ y^2 &= X^2\sin^2\Phi + 2XY\cos\Phi\sin\Phi + Y^2\cos^2\Phi, \\ xy &= \left(X^2 - Y^2\right)\sin\Phi\cos\Phi + XY\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) \end{aligned}$$

für die erste Ellipse der Ausdruck

$$\begin{aligned} c_{12}^2R^2 = {} & \left(c_{12}^2 + a_{12}^2\right)\left(X^2\cos^2\Phi - 2XY\cos\Phi\sin\Phi + Y^2\sin^2\Phi\right) \\ & + 2a_{12}b_{12}\left(\left(X^2 - Y^2\right)\sin\Phi\cos\Phi + XY\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right)\right) \\ & + \left(c_{12}^2 + b_{12}^2\right)\left(X^2\sin^2\Phi + 2XY\cos\Phi\sin\Phi + Y^2\cos^2\Phi\right). \end{aligned}$$

Um die gemischten Terme loszuwerden, muß gelten:

$$\left(b_{12}^2 - a_{12}^2\right)\sin\Phi\cos\Phi + a_{12}b_{12}\left(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi\right) = 0$$

bzw.

$$\tan 2\Phi = \frac{2a_{12}b_{12}}{a_{12}^2 - b_{12}^2}.$$

Daraus folgt die Ellipsengleichung

$$\begin{aligned} c_{12}^2R^2 = {} & X^2\left(c_{12}^2 + a_{12}^2\cos^2\Phi + a_{12}b_{12}\sin 2\Phi + b_{12}^2\sin^2\Phi\right) \\ & + Y^2\left(c_{12}^2 + a_{12}^2\sin^2\Phi - a_{12}b_{12}\sin 2\Phi + b_{12}^2\cos^2\Phi\right) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \sin^2\Phi &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\Phi\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\Phi}}\right) = \frac{1}{2}\frac{a_{12}^2 + b_{12}^2 - \left|a_{12}^2 - b_{12}^2\right|}{a_{12}^2 + b_{12}^2}, \\ \cos^2\Phi &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\Phi\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\Phi}}\right) = \frac{1}{2}\frac{a_{12}^2 + b_{12}^2 + \left|a_{12}^2 - b_{12}^2\right|}{a_{12}^2 + b_{12}^2} \end{aligned}$$

und

$$\sin 2\Phi = \frac{\tan 2\Phi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\Phi}} = \pm\frac{2a_{12}b_{12}}{a_{12}^2 + b_{12}^2}$$

erhalten wir die beiden Halbachsen ohne Fallunterscheidung:

$$c_{12}^2 R^2 = X^2\left(c_{12}^2 + \frac{a_{12}^2}{2}\frac{a_{12}^2+b_{12}^2+\left|a_{12}^2-b_{12}^2\right|}{a_{12}^2+b_{12}^2} \pm \frac{2a_{12}^2 b_{12}^2}{a_{12}^2+b_{12}^2} + \frac{b_{12}^2}{2}\frac{a_{12}^2+b_{12}^2-\left|a_{12}^2-b_{12}^2\right|}{a_{12}^2+b_{12}^2}\right)$$
$$+Y^2\left(c_{12}^2 + \frac{a_{12}^2}{2}\frac{a_{12}^2+b_{12}^2-\left|a_{12}^2-b_{12}^2\right|}{a_{12}^2+b_{12}^2} \mp \frac{2a_{12}^2 b_{12}^2}{a_{12}^2+b_{12}^2} + \frac{b_{12}^2}{2}\frac{a_{12}^2+b_{12}^2+\left|a_{12}^2-b_{12}^2\right|}{a_{12}^2+b_{12}^2}\right).$$

Im Falle $a_{12} > b_{12}$ gilt das obere Vorzeichen und die große Halbachse weist in x-Richtung:

$$1 = \frac{X^2}{R^2\cos^2\zeta_{12}} + \frac{Y^2}{R^2},$$

wobei

$$\cos\zeta_{12} = \frac{c_{12}}{\sqrt{a_{12}^2+b_{12}^2+c_{12}^2}}$$

der Richtungskosinus des Normalenvektors $\vec{n}_{12}$ ist. Im Falle $a_{12} < b_{12}$ gilt das untere Vorzeichen und wir erhalten eine Ellipse mit großer Halbachse in y-Richtung:

$$1 = \frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2\cos^2\zeta_{12}}.$$

Für die beiden anderen Geodäten des sphärischen Dreiecks gelten ganz analoge Ellipsengleichungen, und zwar erhalten wir im Falle $a_{23} > b_{23}$ bzw. $a_{23} < b_{23}$ die Gleichungen

$$1 = \frac{X^2}{R^2\cos^2\zeta_{23}} + \frac{Y^2}{R^2} \quad \text{bzw.} \quad 1 = \frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2\cos^2\zeta_{23}},$$

wobei

$$\cos\zeta_{23} = \frac{c_{23}}{\sqrt{a_{23}^2+b_{23}^2+c_{23}^2}}$$

der Richtungskosinus des Normalenvektors $\vec{n}_{23}$ ist. Schließlich ergeben sich im Falle $a_{31} > b_{31}$ bzw. $a_{31} < b_{31}$ die beiden Ellipsen

$$1 = \frac{X^2}{R^2\cos^2\zeta_{31}} + \frac{Y^2}{R^2} \quad \text{bzw.} \quad 1 = \frac{X^2}{R^2} + \frac{Y^2}{R^2\cos^2\zeta_{31}},$$

mit dem Richtungskosinus

$$\cos\zeta_{31} = \frac{c_{31}}{\sqrt{a_{31}^2+b_{31}^2+c_{31}^2}}$$

des Normalenvektors $\vec{n}_{31}$.

