Aufgabe: Zeigen Sie anhand einer geometrischen Konstruktion, daß sich der Schwerpunkt eines Polygons auf die Schwerpunktbestimmung eines Dreiecks reduzieren läßt.

Lösung: Da wir die Aufgabenstellung konstruktiv lösen wollen, legen wir unserer Konstruktion ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Hexagon zugrunde, das wir sogleich in Dreiecke zerlegt haben (Abb. 1). Der Schwerpunkt jedes Dreiecks läßt sich aus den Seitenhalbierenden relativ leicht bestimmen. Es ergeben sich vier Dreiecke.

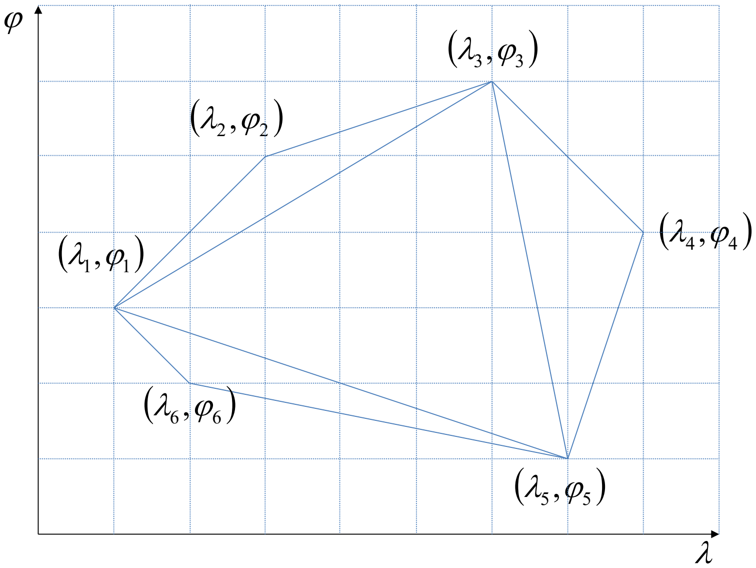

Abbildung 1. Jedes Sechseck gestattet eine Zerlegung in vier Dreiecke

Im nächsten Schritt bestimmen wir wie gewohnt die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecke als Schnittpunkt dreier Seitenhalbierender (Abb. 2).[1]

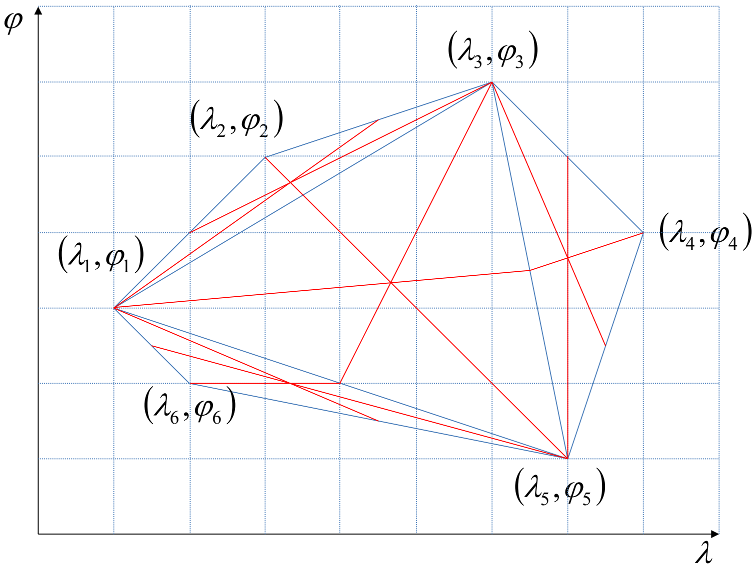

Abbildung 2. Von jedem Teildreieck wird durch Schnitt der Seitenhalbierenden der Schwerpunkt bestimmt

[1] Eigentlich reichen bereits zwei Seitenhalbierende

Diese vier Dreiecksschwerpunkte werden dann paarweise miteinander verbunden, und wie wir sehen, fügen sie sich zu einem Dreieck zusammen (Abb.3). Dessen Schwerpunkt ist aber nicht der gesuchte Polygonschwerpunkt, sondern wir haben, um diesen zu finden, erneut die Schwerpunkte der drei Teildreiecke zu bestimmen.

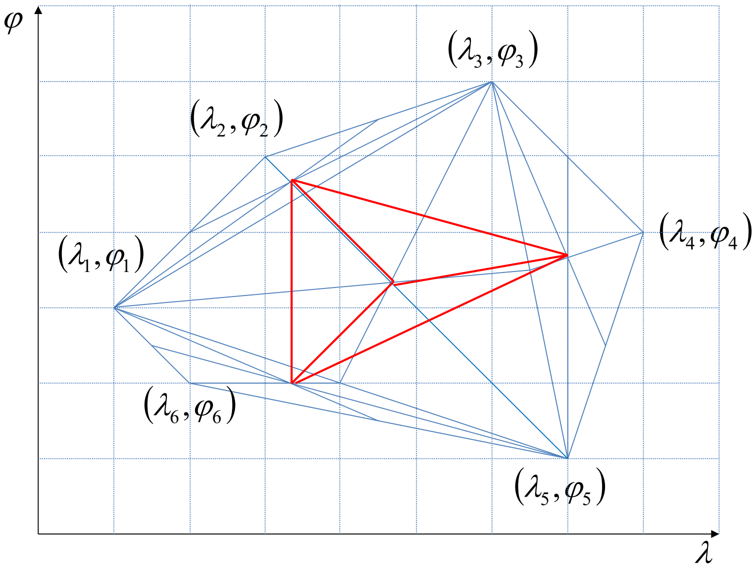

Abbildung 3. Die Schwerpunkte der äußeren Dreiecke werden paarweise miteinander verbunden

Dies geschieht mittels der Konstruktion in Abb. 4 wie gewohnt durch den Schnitt der Seitenhalbierenden, so daß die drei resultierenden Flächenschwerpunkte wieder zu einem Dreieck zusammengeführt werden können.

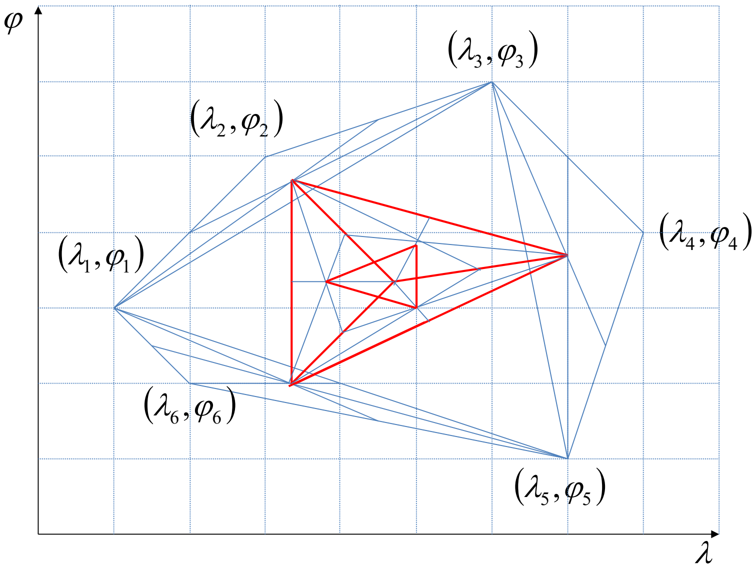

Abbildung 4. Die neuen Flächenschwerpunkte werden wieder zu einem Dreieck zusammengeführt

Dieses letzte Dreieck läßt allerdings keine weiteren Unterteilungen mehr zu, womit sich sein Schwerpunkt als der gesuchte Polygonschwerpunkt herausstellt (siehe Abb. 5). Wir können das leicht nachweisen, indem wir das letzte Dreieck in das ursprüngliche Polygon einzeichnen und feststellen, daß sich die ursprünglichen Seitenhalbierenden wirklich im Schwerpunkt des eingeschlossenen Dreiecks schneiden. Das genannte Verfahren ist ebenso auf sphärische Dreiecke anwendbar, womit sich auch der Schwerpunkt eines sphärischen Polygons berechnen läßt, ohne aufwendige elliptische Integrale lösen zu müssen.

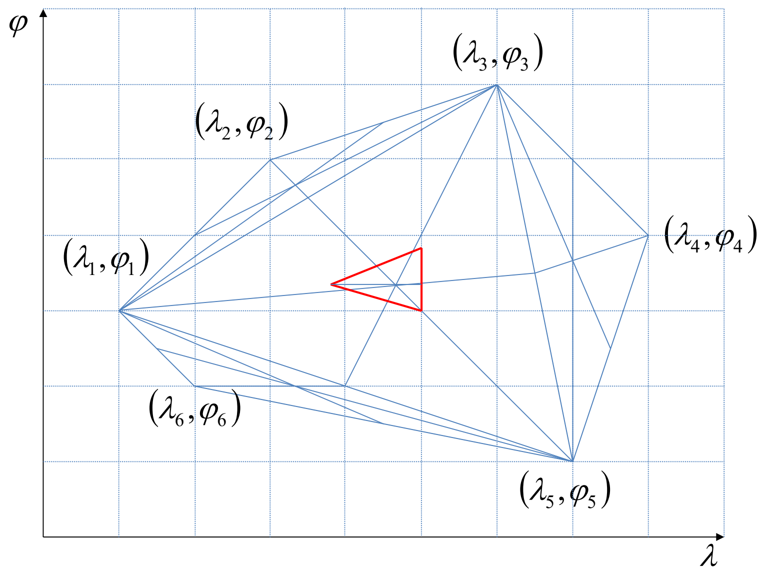

Abbildung 5. Der Schwerpunkt des letzten verbliebenen Dreiecks, welches sich nicht mehr weiter zerlegen läßt, ist gleich dem Polygonschwerpunkt

Allgemein gilt der Satz: Jedes Polygon muß solange in Dreiecke unterteilt werden, bis nur noch ein Dreieck übrigbleibt, dessen Schwerpunkt identisch zum Polygonschwerpunkt ist. Dazu müssen immer wieder die Schwerpunkte der äußeren Randdreiecke zu einem Polygon niedrigerer Ordnung zusammengefaßt werden, bis wir den Schwerpunkt des letzten verbliebenen Dreiecks als den gesuchten Polygonschwerpunkt gefunden haben. Da dieser die mit den Schwerpunktkoordinaten gewichtete Summe der Dreiecksschwerpunkte ist, liegt der Schwerpunkt genau dort, wo das Polygon und das *n*te Dreieck den gleichen Normalenvektor haben,

$$x_s \cdot \Delta - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \Delta_i = x_n \Delta_n, \quad y_s \cdot \Delta - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \Delta_i = y_n \Delta_n,$$

weil sich dann die übrigen Normalenvektoren zu null addieren müssen.

