Aufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt eines sphärischen Polygons.

Lösung: Der Flächeninhalt S eines sphärischen Dreiecks mit Radius R ist gegeben durch

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

wobei α, β und γ die den Seiten a, b und c gegenüberliegenden Winkel sind:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \arccos\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\\
\beta &= \arccos\frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},\\
\gamma &= \arccos\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.
\end{aligned}$$

Definieren wir

$$\begin{aligned}
a_{12} &\equiv a, & & \alpha_{12} \equiv \alpha,\\
a_{23} &\equiv b, & \text{und}\quad & \alpha_{23} \equiv \beta,\\
a_{31} &\equiv c & & \alpha_{31} \equiv \gamma,
\end{aligned}$$

so können wir das Verfahren mit $\alpha_{2i+1,2i+2} \equiv \alpha_{2i+1,2i-1}$ allgemein bis $i = n$ wie folgt fortsetzen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2i-1,2i} &= \arccos\frac{\cos a_{2i-1,2i} - \cos a_{2i,2i+1} \cos a_{2i+1,2i-1}}{\sin a_{2i,2i+1} \sin a_{2i+1,2i-1}},\\
\alpha_{2i,2i+1} &= \arccos\frac{\cos a_{2i,2i+1} - \cos a_{2i+1,2i-1} \cos a_{2i-1,2i}}{\sin a_{2i+1,2i-1} \sin a_{2i-1,2i}},\\
\alpha_{2i+1,2i-1} &= \arccos\frac{\cos a_{2i+1,2i-1} - \cos a_{2i-1,2i} \cos a_{2i,2i+1}}{\sin a_{2i-1,2i} \sin a_{2i,2i+1}}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die $i$te Dreiecksfläche zu

$$S_i = R^2(\alpha_{2i-1,2i} + \alpha_{2i,2i+1} + \alpha_{2i+1,2i-1} - \pi).$$

Das Polygon besteht aus insgesamt $n-2$ solcher Dreiecksflächen:

$$S = \sum_{i=1}^{n-2} S_i = R^2 \sum_{i=1}^{n-2} (\alpha_{2i-1,2i} + \alpha_{2i,2i+1} + \alpha_{2i+1,2i-1} - \pi).$$

Im Falle $n = 6$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
S = {} & R^2(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} - \pi) + R^2(\alpha_{34} + \alpha_{45} + \alpha_{53} - \pi)\\
& + R^2(\alpha_{56} + \alpha_{67} + \alpha_{75} - \pi) + R^2(\alpha_{78} + \alpha_{89} + \alpha_{97} - \pi).
\end{aligned}$$

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

In einem sphärischen Koordinatensystem mit der Länge λ, der Breite φ und dem Radius R erhalten wir die Zentriwinkel der Bögen mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$x = R\cos\lambda\cos\varphi, \quad y = R\sin\lambda\cos\varphi, \quad z = R\sin\varphi$$

und über die Skalarprodukte

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{2i-1}\cdot\vec{r}_{2i} &= R^2\cos a_{2i-1,2i} = R^2\left(\cos(\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i})\cos\varphi_{2i-1}\cos\varphi_{2i} + \sin\varphi_{2i-1}\sin\varphi_{2i}\right),\\
\vec{r}_{2i}\cdot\vec{r}_{2i+1} &= R^2\cos a_{2i,2i+1} = R^2\left(\cos(\lambda_{2i}-\lambda_{2i+1})\cos\varphi_{2i}\cos\varphi_{2i+1} + \sin\varphi_{2i}\sin\varphi_{2i+1}\right),\\
\vec{r}_{2i+1}\cdot\vec{r}_{2i-1} &= R^2\cos a_{2i+1,2i-1} = R^2\left(\cos(\lambda_{2i+1}-\lambda_{2i-1})\cos\varphi_{2i+1}\cos\varphi_{2i-1} + \sin\varphi_{2i+1}\sin\varphi_{2i-1}\right).
\end{aligned}$$

Lösen wir nach den Winkeln auf, erhalten wir folgende Seitenlängen:

$$\begin{aligned}
a_{2i-1,2i} &= \arccos\left(\cos(\lambda_{2i-1}-\lambda_{2i})\cos\varphi_{2i-1}\cos\varphi_{2i} + \sin\varphi_{2i-1}\sin\varphi_{2i}\right),\\
a_{2i,2i+1} &= \arccos\left(\cos(\lambda_{2i}-\lambda_{2i+1})\cos\varphi_{2i}\cos\varphi_{2i+1} + \sin\varphi_{2i}\sin\varphi_{2i+1}\right),\\
a_{2i+1,2i-1} &= \arccos\left(\cos(\lambda_{2i+1}-\lambda_{2i-1})\cos\varphi_{2i+1}\cos\varphi_{2i-1} + \sin\varphi_{2i+1}\sin\varphi_{2i-1}\right).
\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Verfahren nun anhand eines Hexagons (Sechsecks) konkret demonstrieren. Benötigt werden für das erste Dreieck die Zentriwinkel

$$\begin{aligned}
a_{12} &= \arccos\frac{\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}{R^2} = \arccos\left(\cos(\lambda_1-\lambda_2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right),\\
a_{23} &= \arccos\frac{\vec{r}_2\cdot\vec{r}_3}{R^2} = \arccos\left(\cos(\lambda_2-\lambda_3)\cos\varphi_2\cos\varphi_3 + \sin\varphi_2\sin\varphi_3\right),\\
a_{31} &= \arccos\frac{\vec{r}_3\cdot\vec{r}_1}{R^2} = \arccos\left(\cos(\lambda_3-\lambda_1)\cos\varphi_3\cos\varphi_1 + \sin\varphi_3\sin\varphi_1\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgen die sphärischen Dreieckswinkel

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \arccos\frac{\cos a_{12} - \cos a_{23}\cos a_{31}}{\sin a_{23}\sin a_{31}},\\
\alpha_{23} &= \arccos\frac{\cos a_{23} - \cos a_{31}\cos a_{12}}{\sin a_{31}\sin a_{12}},\\
\alpha_{31} &= \arccos\frac{\cos a_{31} - \cos a_{12}\cos a_{23}}{\sin a_{12}\sin a_{23}}
\end{aligned}$$

und die Fläche

$$S_1 = R^2\left(\alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{31} - \pi\right).$$

Aus den Seitenlängen

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$
\begin{aligned}
a_{34} &= \arccos\frac{\vec{r}_3\cdot\vec{r}_4}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_3-\lambda_4)\cos\varphi_3\cos\varphi_4+\sin\varphi_3\sin\varphi_4\bigr),\\
a_{45} &= \arccos\frac{\vec{r}_4\cdot\vec{r}_5}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_4-\lambda_5)\cos\varphi_4\cos\varphi_5+\sin\varphi_4\sin\varphi_5\bigr),\\
a_{53} &= \arccos\frac{\vec{r}_5\cdot\vec{r}_3}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_5-\lambda_3)\cos\varphi_5\cos\varphi_3+\sin\varphi_5\sin\varphi_3\bigr)
\end{aligned}
$$

ergeben sich die Dreieckswinkel des zweiten Dreiecks,

$$
\begin{aligned}
\alpha_{34} &= \arccos\frac{\cos a_{34}-\cos a_{45}\cos a_{53}}{\sin a_{45}\sin a_{53}},\\
\alpha_{45} &= \arccos\frac{\cos a_{45}-\cos a_{53}\cos a_{34}}{\sin a_{53}\sin a_{34}},\\
\alpha_{53} &= \arccos\frac{\cos a_{53}-\cos a_{34}\cos a_{45}}{\sin a_{34}\sin a_{45}},
\end{aligned}
$$

mit der Fläche

$$S_2 = R^2(\alpha_{34}+\alpha_{45}+\alpha_{53}-\pi).$$

Die dritte Dreiecksfläche liefert formal die Seitenlängen

$$
\begin{aligned}
a_{56} &= \arccos\frac{\vec{r}_5\cdot\vec{r}_6}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_5-\lambda_6)\cos\varphi_5\cos\varphi_6+\sin\varphi_5\sin\varphi_6\bigr),\\
a_{67} &= \arccos\frac{\vec{r}_6\cdot\vec{r}_7}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_6-\lambda_1)\cos\varphi_6\cos\varphi_1+\sin\varphi_6\sin\varphi_1\bigr),\\
a_{75} &= \arccos\frac{\vec{r}_7\cdot\vec{r}_5}{R^2} = \arccos\bigl(\cos(\lambda_1-\lambda_5)\cos\varphi_1\cos\varphi_5+\sin\varphi_1\sin\varphi_5\bigr),
\end{aligned}
$$

woraus die Fläche

$$S_3 = R^2(\alpha_{56}+\alpha_{67}+\alpha_{75}-\pi)$$

resultiert. Dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen $\vec{r}_{n+i}=\vec{r}_{2i-1}$ für $i=1,\ldots,n-3$ allgemein die folgende Periodizität gilt:

$$(\lambda_{n+i},\varphi_{n+i},R)=(\lambda_{2i-1},\varphi_{2i-1},R).$$

Für $n=6$ bedeutet das konkret

$$
\begin{aligned}
(\lambda_7,\varphi_7,R)&=(\lambda_1,\varphi_1,R),\\
(\lambda_8,\varphi_8,R)&=(\lambda_3,\varphi_3,R),\\
(\lambda_9,\varphi_9,R)&=(\lambda_5,\varphi_5,R).
\end{aligned}
$$

Somit gilt speziell für das vierte und letzte Dreieck:

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$a_{78} = \arccos\frac{\vec{r}_7 \cdot \vec{r}_8}{R^2} = \arccos(\cos(\lambda_1 - \lambda_3)\cos\varphi_1 \cos\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_3),$$
$$a_{89} = \arccos\frac{\vec{r}_8 \cdot \vec{r}_9}{R^2} = \arccos(\cos(\lambda_3 - \lambda_5)\cos\varphi_3 \cos\varphi_5 + \sin\varphi_3 \sin\varphi_5),$$
$$a_{97} = \arccos\frac{\vec{r}_9 \cdot \vec{r}_7}{R^2} = \arccos(\cos(\lambda_5 - \lambda_1)\cos\varphi_5 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_5 \sin\varphi_1),$$

mit der Fläche

$$S_4 = R^2(\alpha_{78} + \alpha_{89} + \alpha_{97} - \pi).$$

Mit folgenden 6 Wertepaaren für die geographische Länge und Breite, i.e.

$$(\lambda_1, \varphi_1) = (10.1, 48.3),$$
$$(\lambda_2, \varphi_2) = (10.3, 48.5),$$
$$(\lambda_3, \varphi_3) = (10.6, 48.6),$$
$$(\lambda_4, \varphi_4) = (10.8, 48.4),$$
$$(\lambda_5, \varphi_5) = (10.7, 48.1),$$
$$(\lambda_6, \varphi_6) = (10.2, 48.2)$$

und einem Erdradius von 6378,137 km ergibt sich somit eine Fläche von 1811,784 km^2. Das entsprechende Polygon ist schematisch in Abb. 1 dargestellt.

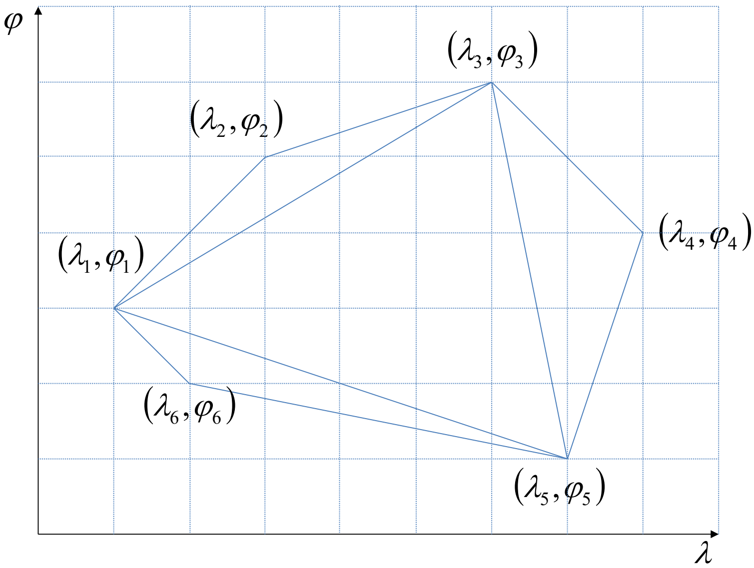

Abbildung 1. Projektionsfreies sphärisches Koordinatensystem mit Längen- und Breitengraden

Für die Validierung der Beispielsoftware wählen wir ein einzelnes Dreieck mit den Zahlenwerten

$$(\lambda_1, \varphi_1) = (0, 0),$$
$$(\lambda_2, \varphi_2) = (0, 90°),$$
$$(\lambda_3, \varphi_3) = (90°, 0)$$

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

und einem Radius von $R = 1$. Die Oberfläche der Achtelkugel beträgt

$$S = \frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708.$$

Das in der Anlage beigefügte Programm liefert damit das richtige Ergebnis. Auch wenn die Schleife nur einmal durchlaufen wird, so stimmen wenigstens die Formeln.

```
>> flaeche
n = 3
i = 1
lambda = 0
phi = 0
i = 2
lambda = 0
phi = 90
i = 3
lambda = 90
phi = 0
S = 1.5708
```

Anhang

```
% Programm flaeche
% Fläche eines Polygons in sphärischen Koordinaten
clear all

% Dimension des Polygons
prompt = 'n = ';
n = input(prompt);

% Kugelradius in km
R = 6378.137;

for i=1:n
    disp(' ')
    I = ['i = ', num2str(i)];
    disp(I)
    prompt = 'lambda = ';
    lambda = input(prompt);
    x(i) = lambda;
    prompt = 'phi = ';
    phi = input(prompt);
    y(i) = phi;
end

% Testpolygon in Längen- und Breitengraden
% x(1) = 10.1; y(1) = 48.3;
% x(2) = 10.3; y(2) = 48.5;
% x(3) = 10.6; y(3) = 48.6;
% x(4) = 10.8; y(4) = 48.4;
% x(5) = 10.7; y(5) = 48.1;
% x(6) = 10.2; y(6) = 48.2;

for i=1:n-3
    x(n+i) = x(2*i-1);
    y(n+i) = y(2*i-1);
```

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

```
end

% Umrechnung in Radiant
for i=1:n+3
    x(i) = x(i)/180*pi;
    y(i) = y(i)/180*pi;
end

% Fläche des Polygons in km²
S =0;
for i=1:n-2
    a(2*i-1,2*i) = acos(cos(x(2*i-1)-x(2*i))*cos(y(2*i-
1))*cos(y(2*i))+sin(y(2*i-1))*sin(y(2*i)));
    a(2*i,2*i+1) = acos(cos(x(2*i)-
x(2*i+1))*cos(y(2*i))*cos(y(2*i+1))+sin(y(2*i))*sin(y(2*i+1)));
    a(2*i+1,2*i-1) = acos(cos(x(2*i+1)-x(2*i-1))*cos(y(2*i+1))*cos(y(2*i-
1))+sin(y(2*i+1))*sin(y(2*i-1)));
    alpha(2*i-1,2*i) = acos((cos(a(2*i-1,2*i))-
cos(a(2*i,2*i+1))*cos(a(2*i+1,2*i-1)))/sin(a(2*i,2*i+1))/sin(a(2*i+1,2*i-
1)));
    alpha(2*i,2*i+1) = acos((cos(a(2*i,2*i+1))-cos(a(2*i+1,2*i-
1))*cos(a(2*i-1,2*i)))/sin(a(2*i+1,2*i-1))/sin(a(2*i-1,2*i)));
    alpha(2*i+1,2*i-1) = acos((cos(a(2*i+1,2*i-1))-cos(a(2*i-
1,2*i))*cos(a(2*i,2*i+1)))/sin(a(2*i-1,2*i))/sin(a(2*i,2*i+1)));
    S = S + R^2*(alpha(2*i-1,2*i) + alpha(2*i,2*i+1) + alpha(2*i+1,2*i-1) -
pi);
end

disp(' ')
S = ['S = ', num2str(S)];
disp(S)

>> flaeche

n = 6

S = 1811.7837
```

Copyright © 2017, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.