Aufgabe: Ein Objekt hat drei bestimmende Merkmale, die auf es zutreffen. Wie groß ist die kombinatorische Wahrscheinlichkeit, daß es sich bei dem vermeintlichen Objekt um selbiges handelt?

Lösung:

Wir lösen die Aufgabe zuerst für **ein** bestimmendes Merkmal. Das Objekt nennen wir Gott, und die Eigenschaft Existenz. Die Wahrscheinlichkeit p, daß Gott existiert, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit q, daß Gott nicht existiert, nämlich 1/2, denn wir wissen es nicht. Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten muß Eins sein, also $p+q=1$.

Nunmehr habe unser Objekt zwei Attribute, von denen wir nicht wissen, ob es sie hat. Nennen wir das zweite Attribut: „Gott ist allmächtig." Wieder wissen wir nicht, ob Gott wirklich allmächtig ist – denn es deutet einiges darauf hin, daß er es nicht ist – und können es folglich nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 annehmen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß Gott existiert **und** allmächtig ist, also beide (voneinander unabhängigen) Merkmale besitzt (denn Gott könnte ja durchaus existieren, aber nicht allmächtig sein)?

Wir bezeichnen nun mit p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten, daß das Merkmal vorhanden ist, und mit q_1 und q_2 die Wahrscheinlichkeiten, daß das Merkmal fehlt. Die Wahrscheinlichkeit q_1q_2 ist die Wahrscheinlichkeit, daß es sich keinesfalls um das gesuchte Objekt handeln kann, weil keines der beiden Merkmale zutrifft, also weder das erste noch das zweite. Die Gegenwahrscheinlichkeit, also die, daß es sich um das gesuchte Objekt handelt, ist demnach $1-q_1q_2$.

Wie berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeit q_1q_2? Aus $p_1+q_1=1$ und $p_2+q_2=1$ folgt

$$(p_1+q_1)(p_2+q_2)=1 \text{ bzw. } p_1p_2+p_1q_2+q_1p_2+q_1q_2=1,$$

also ist $q_1q_2=1-p_1p_2-p_1q_2-q_1p_2$.

Nehmen wir nun noch ein drittes Attribut hinzu: „Gott ist ewig." Auch das wissen wir nicht, wir können es wieder nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/2 vermuten. Nun müssen wir die Wahrscheinlichkeit $q_1q_2q_3$ berechnen. Der Rechengang geht analog:

$$(p_1+q_1)(p_2+q_2)(p_3+q_3)=1 \text{ bzw.}$$

$$p_1p_2p_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3+q_1q_2p_3+p_1p_2q_3+p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2q_3=1,$$

also $q_1q_2q_3=1-p_1p_2p_3-p_1q_2p_3-q_1p_2p_3-q_1q_2p_3-p_1p_2q_3-p_1q_2q_3-q_1p_2q_3$.

Im allgemeinen Fall von n Merkmalen hätten wir einfach das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n}(p_i+q_i)=1$$

auszumultiplizieren und nach dem Term, der ausschließlich aus den q_i besteht, aufzulösen. Da nun alle kombinatorischen Wahrscheinlichkeiten und Gegenwahrscheinlichkeiten gleich sind, d.h.

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_n \equiv p$$
$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_n \equiv q$$

können wir im allgemeinen Fall von n Merkmalen schreiben:

$$\prod_{i=1}^{n} (p+q) = (p+q)^n = 1 .$$

Für diesen Ausdruck gilt die binomische Formel

$$(p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{n-i} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{n-i} q^i + q^n$$

und daraus folgt

$$q^n = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} p^{n-i} q^i .$$

Gilt ferner $p = q$, weil ausschließlich zwei gleichwahrscheinliche Möglichkeiten existieren, vereinfacht sich dieser Ausdruck zu einer Summe von Binomialkoeffizienten:

$$q^n = 1 - p^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} .$$

Wenn nun wie angenommen die Wahrscheinlichkeit für jedes Merkmal $p = 1/2$ ist, folgt daraus

$$q^n = 1 - \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} .$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - q^n$, daß es sich um das gesuchte Objekt handelt, ist demnach

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} .$$

Bei $n = 3$ Merkmalen ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{1}{2^3} \sum_{i=0}^{2} \binom{3}{i} = \frac{1}{8} \left[\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{3!}{0!3!} + \frac{3!}{1!2!} + \frac{3!}{2!1!} \right] = \frac{1}{8} [1+3+3] = \frac{7}{8} .$$

Bei $n = 2$ Merkmalen erhalten wir

$$\frac{1}{2^2}\sum_{i=0}^{1}\binom{2}{i}=\frac{1}{4}\left[\binom{2}{0}+\binom{2}{1}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{2!}{0!2!}+\frac{2!}{1!1!}\right]=\frac{1}{4}[1+2]=\frac{3}{4}\,.$$

Wollen wir hingegen ein Objekt anhand nur eines Merkmals erkennen, so erhalten wir erwartungsgemäß das Ergebnis

$$\frac{1}{2^1}\sum_{i=0}^{0}\binom{1}{i}=\frac{1}{2}\binom{1}{0}=\frac{1}{2}\,.$$

Wir sehen also, daß der Wahrheitswert 1 erst im Grenzfall unendlich vieler zutreffender Merkmale erreicht wird und auch der Wahrheitswert 0 nur im Grenzfall unendlich vieler nicht zutreffender Merkmale, und daß die Wahrheit zu Beginn unserer Einschätzung, d.h. solange nur ein Merkmal über das Objekt bekannt ist, in der Mitte liegt, nämlich bei 1/2, und daß die endgültige Wahrheit sich nur festigt, wenn besonders viele Merkmale des in Betracht gezogenen Objekts an ihm zutreffen. Die Wahrheit wird sich allerdings ebenso schnell wieder verflüchtigen, wenn besonders viele Merkmale nicht zutreffen, denn die Wahrheitskurven für $1-q^n$ und q^n als Funktion von n verlaufen zueinander komplementär, bilden im Mittel aber immer 1/2. In der physikalischen Welt gibt es also keine absolute Wahrheit, und wenn es sie denn gibt, erdichtet sie sich der Mensch, was sich sehr schön an dem Objekt „Gott“ demonstrieren läßt.