Aufgabe: Sie wollen einen anfliegenden Bomber vom Boden aus mit einer Lenkrakete abschießen. Lösen Sie die Aufgabenstellung zweidimensional durch ein neuronales Netzwerk.

Lösung: Betrachten wir zunächst die Geometrie der Anordnung zum Anfangszeitpunkt in Abb. 1.

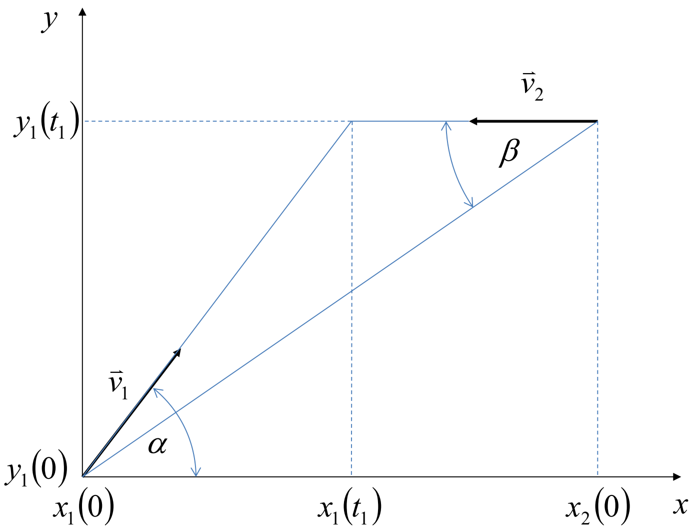

Abbildung 1. Werferposition der Lenkrakete und Bomber zum Zeitpunkt der ersten Peilung

Nach dem Sinussatz besteht zwischen den Winkeln α und β folgender Zusammenhang:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{x_2(0)-x_2(t_1)}{x_1(t_1)}\cos\alpha=\frac{v_2}{v_1}.$$

Zunächst mißt man die gegnerische Geschwindigkeit und peilt das anfliegende Objekt, woraus sich der Abgangs- bzw. Vorhaltewinkel gemäß folgender Formel berechnet:

$$\alpha=\beta+\arcsin\frac{v_2\sin\beta}{v_1}.$$

Soll das Flugzeug unter einem definierten Abgangswinkel von 45° abgeschossen werden, so muß die Bedingung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\beta-\sin\beta}{\sin\beta}=\frac{v_2}{v_1}\quad\text{bzw.}\quad\tan\beta=\frac{v_1}{v_1+\sqrt{2}v_2}$$

erfüllt sein. Für $v_1 >> v_2$ kann $\beta\approx\pi/4$ werden. Bei gleichen Geschwindigkeiten muß gelten:

$$\alpha-\beta=\beta\ \text{bzw.}\ \beta=\alpha/2.$$

Die Bewegungsgleichungen sind gegeben durch

$$x_1(t) = v_1 \cos\alpha \cdot t, \quad \dot{x}_1(t) = v_1 \cos\alpha,$$
$$y_1(t) = v_1 \sin\alpha \cdot t, \quad \dot{y}_1(t) = v_1 \sin\alpha$$

für die eigene Bewegung und

$$x_2(t) = x_2(0) - v_2 t, \quad \dot{x}_2(t) = -v_2,$$
$$y_2(t) = y_2(0) \qquad \dot{y}_2(t) = 0$$

für die gegnerische. Eliminierung der Zeitabhängigkeit mittels

$$t = \frac{x_2(0) - x_2(t)}{v_2}$$

und der Substitution $x_2(t) = y_2(t)\cot\beta$ führt zu den gekoppelten Gleichungen

$$v_2 x_1(t) = \dot{x}_1(t)\left(x_2(0) - x_2(t)\right),$$
$$v_2 y_1(t) = \dot{y}_1(t)\left(x_2(0) - y_2(t)\cot\beta\right),$$

die zu jedem Zeitpunkt gelten. Man kann die eigenen Lenkgrößen wahlweise nach den Orten oder den Geschwindigkeiten auflösen und jedesmal iterativ neu berechnen. Das System ist so einzustellen, daß die Peilung steht, d.h. sie darf nicht auswandern. Dann kommt es unweigerlich zur Kollision bzw. zum Abschuß. Das Problem vereinfacht sich bedeutend, wenn die Lenkbewegung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt,

$$\dot{x}_1(t) = \dot{x}_1(0), \quad \dot{y}_1(t) = \dot{y}_1(0).$$

In Matrizendarstellung können wir das neuronale Netzwerk wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \frac{x_2(0)}{v_2}\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{pmatrix} - \frac{1}{v_2}\begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) & 0 \\ 0 & \dot{y}_1(0)\cot\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wir trainieren es auf den Schnittpunkt der beiden Flugtrajektorien

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t_1) \\ y_2(t_1) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v_2 + \dot{x}_1(0)}{x_2(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}{x_2(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{pmatrix}.$$

Es besitzt die Trainingslösungen

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{v_2 + \dot{x}_1(0)}{x_2(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}{x_2(0)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante des homogenen Systems lautet:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{v_2 + \dot{x}_1(0)}{x_2(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}{x_2(0)} \end{vmatrix} = \frac{(v_2 + \dot{x}_1(0))(v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta)}{x_2^2(0)},$$

womit sich die Inverse zu

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v_2 + \dot{x}_1(0)}{x_2(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}{x_2(0)} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2(0)}{v_2 + \dot{x}_1(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{x_2(0)}{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta} \end{pmatrix}$$

berechnet. Die Lösungen lauten schließlich

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2(0)}{v_2 + \dot{x}_1(0)} & 0 \\ 0 & \dfrac{x_2(0)}{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{pmatrix}$$

und sind in Komponentenschreibweise gegeben durch

$$x_1(t_1) = \frac{x_2(0)}{v_2 + \dot{x}_1(0)}\dot{x}_1(0), \quad y_1(t_1) = \frac{x_2(0)}{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}\dot{y}_1(0).$$

Wegen $\dot{x}_1(0) = v_1 \cos\alpha$ und $\dot{y}_1(0) = v_1 \sin\alpha$ folgt nach Division der y- durch die x-Komponente der Ausdruck

$$\frac{y_1(t_1)}{x_1(t_1)} = \frac{v_2 + \dot{x}_1(0)}{v_2 + \dot{y}_1(0)\cot\beta}\frac{\dot{y}_1(0)}{\dot{x}_1(0)}$$

und nach entsprechender Umformung der Zusammenhang $\alpha = \beta.$ Das neuronale Netz konvergiert also durch entsprechendes Training gegen die gewünschte Lösung.

