Aufgabe: Legen Sie den schiefen Wurf als neuronales Netz aus.

Lösung: Für den schiefen Wurf lauten die Bewegungsgleichungen

$$x(t) = vt\cos\alpha, \quad y(t) = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

wobei α der Abgangswinkel ist, v die Abgangsgeschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung. Die später benötigten zeitlichen Ableitungen lauten

$$\dot{x}(t) = v\cos\alpha, \quad \dot{y}(t) = v\sin\alpha - gt.$$

Zur Zeit

$$t_1 = \frac{2v\sin\alpha}{g}$$

trifft der geworfene Körper ins Ziel bei

$$x(t_1) = vt_1\cos\alpha, \quad y(t_1) = vt_1\sin\alpha - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0.$$

Genau dann lauten die Ableitungen

$$\dot{x}(t_1) = v\cos\alpha = \dot{x}(0), \quad \dot{y}(t_1) = -v\sin\alpha = -\dot{y}(0).$$

Das können wir als Matrixabbildung der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Transformation vom Zustand

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix}$$

in den Zustand

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \end{pmatrix} = \mathbf{Wx}$$

stellt ein neuronales Netzwerk mit der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dar. Die Lösung erhalten wir mit Hilfe der Umkehrabbildung

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y},$$

wobei die inverse Matrix durch

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist mit $\det \mathbf{W} = -1$. Die Lösungen des neuronalen Netzes erhalten wir dann aus den Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ \dot{y}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_1) \\ -\dot{y}(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix},$$

was eigentlich nicht weiter verwundert, denn davon sind wir schließlich ausgegangen. Wir sehen aber, daß es unterschiedliche Möglichkeiten gibt, Geschwindigkeit v und Winkel α zu wählen, da das Ziel in einem festen Abstand

$$x(t_1) = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = d$$

steht. Präzise gesagt hätten wir schreiben müssen:

$$x(t_1) = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha_1}{g} = d.$$

Diese Bedingung kann auch von beliebigen Kombinationen aus v_i und α_i erfüllt werden, sofern sich nur eine konstante Entfernung damit ergibt:

$$x(t_i) = \frac{v_i^2 \sin 2\alpha_i}{g} = d.$$

Der Wurf dauert nur unterschiedlich lange, weil mit

$$v_i = \sqrt{\frac{dg}{\sin 2\alpha_i}}$$

auch die Zeit

$$t_i = \frac{2v_i \sin\alpha_i}{g} = \sqrt{\frac{2d\tan\alpha_i}{g}}$$

unterschiedlich ist. Er dauert um so länger, je steiler das Geschoß geworfen wird. Alle Kombinationen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos\alpha_i \\ v_i \sin\alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{dg}{2\tan\alpha_i}} \\ \sqrt{\dfrac{dg}{2\cot\alpha_i}} \end{pmatrix}$$

können durch das Netzwerk trainiert werden. Entsprechend können wir in obiger Gleichung auch den Winkel eliminieren, um die Geschwindigkeitsabhängigkeit zu bestimmen, nämlich mittels

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gd}{v_i^2}.$$

Dann hängen alle Neuronen nur noch von der Geschwindigkeit ab.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \cos\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{gd}{v_i^2}\right] \\ v_i \sin\left[\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{gd}{v_i^2}\right] \end{pmatrix}$$

In der Regel liegen die Werte, welche die Bedingung der Konstanz der Entfernung erfüllen, auf einer Hyperfläche. Somit führt das neuronale Netz für alle *i* Kombinationen

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t_i) \\ \dot{y}(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \cos\alpha_i \\ -v_i \sin\alpha_i \end{pmatrix},$$

zu denselben Lösungen, d.h. der Wurf gelingt immer, wenn die gesamte Hyperfläche trainiert wurde (oder auch nur hinreichend viele interpolierbare, äquidistante Punkte auf der Hyperfläche). Die Gewichtsmatrix muß dazu nicht erneut angepaßt werden. Sie kann mit einem einzigen erfolgreichen Versuch ermittelt werden und liefert dann trotz unterschiedlicher Geschwindigkeiten und Winkel dieselben Zielwerte. Wer es nicht glaubt, kann es ausprobieren.

