

# Mathematikaufgabe 106

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

**Aufgabe:** Sie wollen ein Ausweichmanöver im Luftkampf durch ein neuronales Netz anstoßen. Lösen Sie die Trainingsaufgabe durch einen möglichst einfachen Fall.

**Lösung:** Ehe wir das Gleichungssystem des neuronalen Netzes aufstellen, müssen wir uns zunächst mit der Geometrie der Anordnung vertraut machen. Betrachten wir dazu Abb. 1.

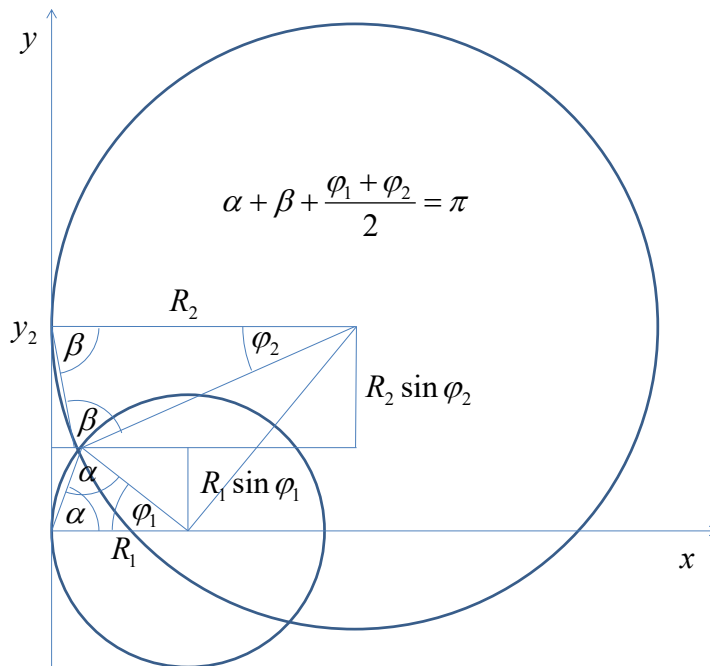


Abbildung 1. Geometrie eines in zwei Dimensionen stattfindenden Ausweichmanövers

Das ausweichende Luftfahrzeug befinde sich zum Zeitpunkt  $t = 0$ , d.h. bei Manöverbeginn, im Koordinatenursprung eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems. Das gegnerische Luftfahrzeug, dem ausgewichen werden soll, in der Regel ein Lenkflugkörper, befindet sich zur selben Zeit im Abstand  $y_2$  vom Koordinatenursprung auf der  $y$ -Achse ( $x = 0$ ). Mit Beginn des Ausweichens nach rechts folgt uns das gegnerische Luftfahrzeug, um uns zu treffen, auf seinem kleinstmöglichen Krümmungsradius  $R_2$ , der jedoch bei vergleichbarer Querbewegungsbeschleunigungsfähigkeit aufgrund der höheren Angriffsgeschwindigkeit größer ausfallen muß als der eigene ( $R_1$ ). Im Abstand der Sekanten

$$\zeta_1 = 2R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \quad \text{und} \quad \zeta_2 = 2R_2 \sin \frac{\varphi_2}{2}$$

kommt es zum Zusammenstoß, falls es dem Ausweichenden nicht gelingt, früher am erwarteten Kollisionspunkt zu sein. Die beiden Sekanten schließen mit der  $x$ -Achse die Winkel  $\alpha$  bzw.  $\beta$  ein. Aus geometrischen Gründen können wir den Abstand  $y_2$  nun auf zwei Arten bestimmen:

$$y_2 = \zeta_1 \sin \alpha + \zeta_2 \sin \beta = 2R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \alpha + 2R_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \beta,$$

## Mathematikaufgabe 106

---

wobei  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Scheitelwinkel der gleichschenkligen Dreiecke sind, welche die beiden Sekanten mit den Kreismittelpunkten einschließen. Andererseits zeigt der Vergleich mit

$$y_2 = R_1 \sin \varphi_1 + R_2 \sin \varphi_2 = 2R_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} + 2R_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

daß sich die beiden Basiswinkel mit den Scheitelwinkeln wegen

$$\sin \alpha = \cos \frac{\varphi_1}{2} = \sin \frac{\pi - \varphi_1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sin \beta = \cos \frac{\varphi_2}{2} = \sin \frac{\pi - \varphi_2}{2}$$

wie folgt zueinander verhalten:

$$\alpha = \frac{\pi - \varphi_1}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\pi - \varphi_2}{2}.$$

Für den Schnittpunkt der beiden Kreise gilt

$$x_s = R_1 - R_1 \cos \varphi_1 = R_2 - R_2 \cos \varphi_2$$

und damit

$$x_s = \frac{1}{2} R_1 (1 - \cos \varphi_1) + \frac{1}{2} R_2 (1 - \cos \varphi_2) = R_1 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} + R_2 \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}.$$

Die Kreisgleichung für den eigenen Krümmungskreis mit Mittelpunkt  $x_1 = R_1$  und  $y_1 = 0$  lautet

$$(x - R_1)^2 + y^2 = R_1^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 2xR_1 + y^2 = 0.$$

Die  $x$ -Koordinate des Schnittpunkts erhalten wir, indem wir die positive Wurzel der  $y$ -Koordinate unseres eigenen Krümmungskreises, i.e.

$$y = \sqrt{2xR_1 - x^2},$$

in die Kreisgleichung, die den Krümmungskreis des Gegners beschreibt, einsetzen. Diese liefert mit  $x_2 = R_2$  den Ausdruck

$$(x - R_2)^2 + (y - y_2)^2 = R_2^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 - 2R_2x + y^2 - 2y_2y + y_2^2 = 0.$$

Wir erhalten

$$\frac{R_1 - R_2}{y_2} x + \frac{y_2}{2} = \sqrt{2xR_1 - x^2},$$

woraus sich die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{y_2^2(R_2 + R_1)}{y_2^2 + (R_1 - R_2)^2} x + \frac{1}{4} \frac{y_2^4}{y_2^2 + (R_1 - R_2)^2} = 0$$

## Mathematikaufgabe 106

ergibt. Als Lösung für den kleineren Schnittpunkt resultiert die Bestimmungsgleichung

$$x_s = \frac{y_2^2}{2} \frac{R_2 + R_1 - \sqrt{4R_2R_1 - y_2^2}}{y_2^2 + (R_1 - R_2)^2}.$$

Die Bestimmungsgleichung für die  $y$ -Koordinate des Schwerpunkts erhalten wir analog:

$$y_s = \frac{1}{2}y_2 - \frac{R_2 - R_1}{y_2}x_s.$$

Setzen wir die  $x$ -Koordinate des Schwerpunkts ein, hängt das Ergebnis nur vom Abstand  $y_2$  und den beiden Radien ab:

$$y_s = \frac{1}{2}y_2 \left[ 1 - \frac{R_2^2 - R_1^2 - (R_2 - R_1)\sqrt{4R_2R_1 - y_2^2}}{y_2^2 + (R_1 - R_2)^2} \right].$$

Wir erkennen, daß es überhaupt nur Lösungen gibt, wenn  $y_2$  kleiner oder gleich dem doppelten geometrischen Mittelwert der beiden Radien ist:

$$y_2 \leq 2\sqrt{R_2R_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_2}{R_1} \leq 2\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

Ein Sonderfall tritt auf für  $y_2 = R_2$ , wenn der Mittelpunkt des gegnerischen Krümmungskreises zu Manöverbeginn unter  $45^\circ$  gepeilt wird. Dann ist  $y_s = x_s$ . Abb. 2 zeigt den Schnittpunkt der beiden Kreise in der gegebenen Anordnung.

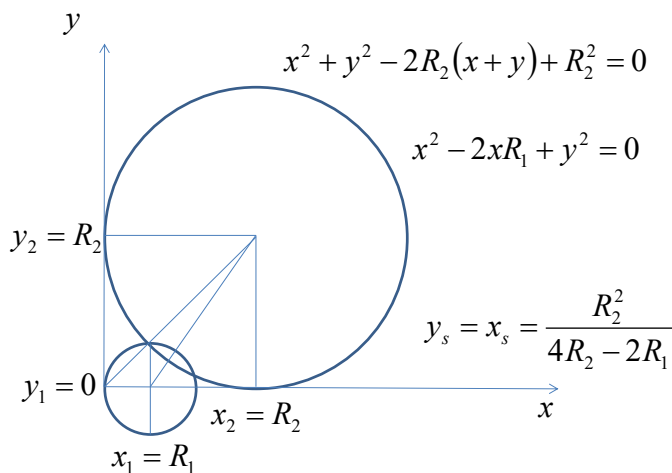


Abbildung 2. Der Sonderfall des Schnittes zweier Kreise bei  $45^\circ$ -Peilung

Die Bewegungsgleichungen des ausweichenden Luftfahrzeugs sind nun gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R_1 \left( 1 - \cos \frac{v_1 t}{R_1} \right), & \dot{x}_1(t) &= v_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1}, \\ y_1(t) &= R_1 \sin \frac{v_1 t}{R_1}, & \dot{y}_1(t) &= v_1 \cos \frac{v_1 t}{R_1}, \end{aligned}$$

wohingegen sich der angreifende Lenkflugkörper durch folgende Bewegungsgleichungen beschreiben läßt:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= R_2 \left( 1 - \cos \frac{v_2 t}{R_2} \right), & \dot{x}_2(t) &= v_2 \sin \frac{v_2 t}{R_2}, \\ y_2(t) &= y_2(0) - R_2 \sin \frac{v_2 t}{R_2}, & \dot{y}_2(t) &= -v_2 \cos \frac{v_2 t}{R_2}. \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der beiden Kreise wird von den beiden Luftfahrzeugen zu den Zeiten  $t_1$  bzw.  $t_2$  erreicht. Für diesen Fall nehmen die Bewegungsgleichungen folgende Werte an:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= x_s, & x_2(t_2) &= x_s, \\ y_1(t_1) &= y_s, & y_2(t_2) &= y_s. \end{aligned}$$

Ziel des Verfahrens ist es, die explizite Zeitabhängigkeit mittels der Ableitungen aus unseren Lösungen zu eliminieren, die damit folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R_1 \left( 1 - \frac{\dot{y}_1(t)}{v_1} \right), & y_1(t) &= R_1 \frac{\dot{x}_1(t)}{v_1}, \\ x_2(t) &= R_2 \left( 1 + \frac{\dot{y}_2(t)}{v_2} \right), & y_2(t) &= y_2(0) - R_2 \frac{\dot{x}_2(t)}{v_2}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke lösen wir nun nach den Geschwindigkeiten auf:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{v_1}{R_1} y_1(t), & \dot{y}_1(t) &= v_1 \left( 1 - \frac{x_1(t)}{R_1} \right), \\ \dot{y}_2(t) &= v_2 \left( \frac{x_2(t)}{R_2} - 1 \right), & \dot{x}_2(t) &= v_2 \frac{y_2(0) - y_2(t)}{R_2}. \end{aligned}$$

Zur Zeit  $t = 0$  ergeben sich damit folgende Werte:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(0) &= \frac{v_1}{R_1} y_1(0) = 0, & \dot{y}_1(0) &= v_1 \left( 1 - \frac{x_1(0)}{R_1} \right) = v_1, \\ \dot{y}_2(0) &= v_2 \left( \frac{x_2(0)}{R_2} - 1 \right) = -v_2, & \dot{x}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Im folgenden trainieren wir unser neuronales Netz nur auf den 45°-Sonderfall

$$x_1(t_1) = R_1, \quad x_2(t_2) = R_1 = R_2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{R_2}{2 + \sqrt{2}},$$

$$y_1(t_1) = R_1, \quad y_2(t_2) = R_1 = R_2 \left(1 - \sin \frac{\pi}{4}\right) = \frac{R_2}{2 + \sqrt{2}}$$

mit  $y_2(0) = R_2$ . Die Geschwindigkeiten, unter denen die berechnete Überschneidung der Bahnkurven stattfindet, sind gegeben durch

$$\dot{x}_1(t_1) = \frac{v_1}{R_1} y_1(t_1) = v_1, \quad \dot{y}_1(t_1) = 0,$$

$$\dot{y}_2(t_2) = -v_2 \left(1 - \frac{x_2(t_2)}{R_2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} v_2, \quad \dot{x}_2(t_2) = v_2 \left(1 - \frac{y_2(t_2)}{R_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2.$$

Dabei haben wir von der Beziehung

$$1 - \frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Gebrauch gemacht. In übersichtlicher Matrizenschreibweise fassen wir wie folgt zusammen:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\dot{y}_1(t)}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{x}_1(t)}{v_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = (2 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 + \frac{\dot{y}_2(t)}{v_2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\dot{x}_2(t)}{v_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingungen lassen sich in dieser Notation darstellen durch

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = (2 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \end{pmatrix} = (2 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ y_2(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix}.$$

Zur Aufstellen der neuronalen Netzwerkgleichungen müssen wir die Umkehrabbildungen

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\dot{y}_1(t)}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{x}_1(t)}{v_1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\dot{y}_2(t)}{v_2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\dot{x}_2(t)}{v_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

berechnen. Dabei sind die inversen Matrizen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\dot{y}_1(t)}{v_1} & 0 \\ 0 & \frac{\dot{x}_1(t)}{v_1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{v_1 - \dot{y}_1(t)} & 0 \\ 0 & \frac{v_1}{\dot{x}_1(t)} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\dot{y}_2(t)}{v_2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\dot{x}_2(t)}{v_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2 + \dot{y}_2(t)} & 0 \\ 0 & \frac{v_2}{v_2 - \dot{x}_2(t)} \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen lauten damit

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{v_1 - \dot{y}_1(t)} & 0 \\ 0 & \frac{v_1}{\dot{x}_1(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1}{v_1 - \dot{y}_1(t)} x_1(t) \\ \frac{v_1}{\dot{x}_1(t)} y_1(t) \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2 + \dot{y}_2(t)} x_2(t) \\ \frac{v_2}{v_2 - \dot{x}_2(t)} y_2(t) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ y_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t_2) \\ y_2(t_2) \end{pmatrix}$$

muß gelten

$$\begin{pmatrix} (2 + \sqrt{2})v_1 x_1(t) \\ v_1 - \dot{y}_1(t) \\ (2 + \sqrt{2})v_1 y_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_2 + \dot{y}_2(t)} x_2(t) \\ \frac{v_2}{v_2 - \dot{x}_2(t)} y_2(t) \end{pmatrix}.$$

In Komponentenschreibweise folgt demnach ein linearer Zusammenhang zwischen den eigenen Geschwindigkeitskomponenten und denen des Gegners:

$$\begin{aligned} x_2(t)\dot{y}_1(t) &= -\left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{v_1}{v_2} x_1(t)\dot{y}_2(t) + v_1\left(x_2(t) - \left(2 + \sqrt{2}\right)x_1(t)\right), \\ y_2(t)\dot{x}_1(t) &= -\left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{v_1}{v_2} y_1(t)\dot{x}_2(t) + v_1\left(2 + \sqrt{2}\right)y_1(t). \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen stellen ein neuronales Netzwerk dar, weil man mit ihnen die eigenen Orts- und Geschwindigkeitskomponenten anhand derer des Gegners einstellen kann, wobei die eigenen Größen bekannt sind.

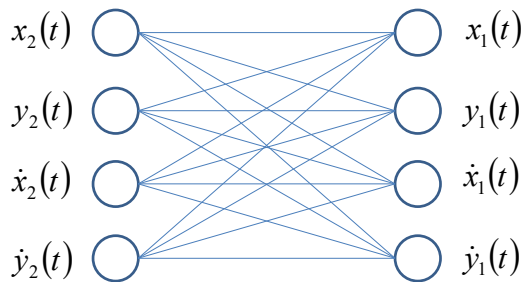


Abbildung 3. Wechselseitige Abhängigkeit der Ein- und Ausgangsneuronen

Speziell zur Zeit  $t = 0$  gilt mit  $x_1(0) = x_2(0) = y_1(0) = 0$

$$\dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = v_1.$$

Zur Zeit  $t = t_1$  erhalten wir mit  $x_1(t_1) = y_1(t_1) = R_1$  und

$$\dot{x}_1(t_1) = v_1, \quad \dot{y}_1(t_1) = 0$$

erwartungsgemäß die Geschwindigkeiten des Gegners,

$$\dot{x}_2(t_1) = v_2 \left(1 - \frac{y_2(t_1)}{R_2}\right), \quad \dot{y}_2(t_1) = v_2 \left(\frac{x_2(t_1)}{R_2} - 1\right),$$

wobei  $R_2 = (2 + \sqrt{2})R_1$  bekannt ist. Für uns zwar nicht mehr interessant, weil wir selbst den rettenden Ausweichpunkt längst erreicht haben, hier nur formalitätshalber die Verhältnisse zur Zeit  $t = t_2$ , wobei  $x_2(t_2) = y_2(t_2) = R_1$  und

$$\dot{x}_2(t_2) = -\frac{v_2}{\sqrt{2}}, \quad \dot{y}_2(t_2) = \frac{v_2}{\sqrt{2}}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t_2) &= v_1 - (1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) \frac{v_1}{\sqrt{2}} \frac{x_1(t_2)}{R_1}, \\ \dot{x}_1(t_2) &= (1 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) \frac{v_1}{\sqrt{2}} \frac{y_1(t_2)}{R_1}\end{aligned}$$

bzw.  $\dot{x}_1(t_2) + \dot{y}_1(t_2) = v$ , wobei wegen

$$\frac{v_1 t_1}{R_1} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{v_2 t_2}{R_2} = \frac{\pi}{4}$$

lediglich noch die Ausweichbedingung

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2v_2}{v_1} \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \frac{v_2}{v_1} < 1$$

erfüllt sein muß. Um das Manöver erfolgreich fliegen zu können, muß die eigene Geschwindigkeit

$$v_1 > \frac{2v_2}{2 + \sqrt{2}} \approx 0,59 \cdot v_2$$

sein. Man muß also, um einem angreifendem Lenkflugkörper aufgrund der Geometrie ausweichen zu können, selbst etwa 60 % der gegnerischen Bahngeschwindigkeit in der Kurve fliegen können, sonst bleibt das Erfolgserlebnis aus und man wird abgeschossen.