Aufgabe: Beweisen Sie, daß ein neuronales Netzwerk nicht mit jeder beliebigen Teleskopsumme konvergiert.

Beweis: Sei 0 eine Teleskopsumme der Art

$$0=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k}-(-1)^{k+1}\right]=-1-1+1+1+\ldots+(-1)^{n}-(-1)^{n+1}.$$

Falls n gerade, also z.B. gleich 2 ist, ist diese Aussage richtig, denn

$$0=\sum_{k=1}^{2}\left[(-1)^{k}-(-1)^{k+1}\right]=-1-1+1+1.$$

Wählen wir n allerdings ungerade, so haben wir z.B. für $n=3$ den Fall, daß

$$0=\sum_{k=1}^{3}\left[(-1)^{k}-(-1)^{k+1}\right]=-1-1+1+1-1-1=-2,$$

und damit wäre nach Division beider Seiten durch -2 der Beweis erbracht, daß $0=1$ ist. Obwohl sich in dieser Differenz jeder zweite und der nächstfolgende erste Term wegen

$$(-1)^{k+1}=(-1)^{k+1}$$

stets wegheben, gilt nicht, was sonst für Teleskopsummen gilt, daß nämlich nur der erste Term überlebt und der letzte einem Grenzwert zustrebt:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k}-(-1)^{k+1}\right]=-1-(-1)^{n+1}.$$

Der Grund ist, daß die Folge $(-1)^{k}$ nicht konvergiert. Man kann sich statt dessen mit der Folge $(-1)^{2k}$ behelfen, die für alle natürlichen Zahlen gegen 1 konvergiert. Hierbei ist ebenfalls stets

$$(-1)^{2(k+1)}=(-1)^{2(k+1)},$$

und die entsprechende Teleskopsumme lautet

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{2k}-(-1)^{2(k+1)}\right]=1-(-1)^{2(n+1)}=0 \quad \text{für} \quad n\in\{1,2,3,\ldots\}$$

Obwohl es vordergründig egal sein sollte, ob man eine unendliche Reihe nach einem geraden oder ungeraden Term abbricht, ist dem offensichtlich nicht so. Giordano Bruno zweifelte mit seinem Beweis $0=1$ an der Kompetenz der Mathematik und verstieß damit gegen die Logik seiner Zeit, die vorrangig auf Aristoteles gründete. Er landete schließlich wegen Ketzerei auf dem Scheiterhaufen.[1]

[1] Giordano Bruno gilt auch als Vater der ersten Raumfahrtidee, die er in seiner Schrift „De immenso" entwarf.

