Aufgabe: Mit wie vielen Trainingsszenarien müssen Sie ein neuronales Netz anlernen, wenn es in Erwartung von bis zu 5 eintretenden Ereignissen 5 unterschiedliche Entscheidungen treffen soll. Die erwarteten Ereignisse sollen in bezug auf die Entscheidung gleichwertig sein.

Lösung: Das neuronale Netz besteht im einfachsten Fall aus 5 Eingangs- und 5 Ausgangsneuronen. Treten alle 5 Ereignisse ein, so soll das Ausgangsneuron 1 feuern (Plan A). Tritt nur eines der Ereignisse ein, soll Ausgangsneuron 5 feuern (Plan E). Bei 4 eintretenden Ereignissen möge Ausgangsneuron 2 feuern (Plan B), bei dreien Ausgangsneuron 3 (Plan C) und bei nur zwei Ereignissen Ausgangsneuron 4 (Plan D).

Plan A setzt nur ein Trainingsszenario voraus, bei Plan E sind es bereits 5. Plan D erfordert 10 Trainingsszenarien. Bei 4 eintretenden Ereignissen (Plan B) gibt es genau 5 Möglichkeiten, welches Neuron nicht feuert, bei Plan C sind es ganze 10 Möglichkeiten, welche zwei Neuronen nicht feuern. Insgesamt haben wir einschließlich der Möglichkeit, daß gar kein Neuron feuert (Plan F) $1+5+10+10+5+1=32$ Szenarien, von denen 31 trainiert werden müssen. Die Zahl der Trainingsszenarien wird augenscheinlich durch die Binomialkoeffizienten

$$\binom{5}{5}=1,\quad \binom{5}{4}=5,\quad \binom{5}{3}=10,\quad \binom{5}{2}=10,\quad \binom{5}{1}=5,\quad \binom{5}{0}=1$$

festgelegt. Allgemein gilt für den Binomialkoeffizienten die Formel

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Die Zahl der Trainingsszenarien ergibt sich allgemein aus dem binomischen Satz

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{k}a^{n-1}b^1+\ldots+\binom{n}{k}a^0 b^n$$

für $a=b=1$. Dann gilt nämlich

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Im allgemeinen Fall müssen wir also

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\binom{n}{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{k}+\ldots+\binom{n}{k-1}=2^n-1$$

Szenarien anlernen. Das sind im Falle $n=5$

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}-\binom{5}{5}=\binom{n}{0}+\binom{5}{k}+\ldots+\binom{5}{k-1}=2^5-1=31$$

Trainingsszenarien. Ein derart trainiertes Netz hat den Vorteil, daß es in seinen Entscheidungen unfehlbar ist.

